Universidade Federal do Rio de Janeiro | Instituto de Física

Física II | 2018/1

Lista 6 - Oscilações

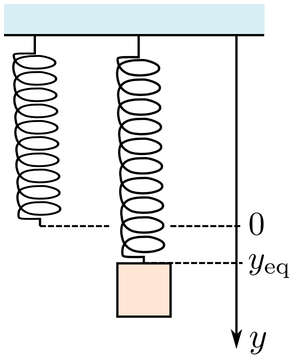
Prof. Elvis Soares

1. A fórmula de Euler é uma das relações matemáticas mais belas já conhecida, sendo escrita na forma
$$e^{ix} = \cos x + i \,\text{sen}\, x$$
e pode ser utilizada para demonstrar algumas relações trigonométricas. (a) Mostre que $e^{-ix} = \cos x - i \,\text{sen}\, x$. (b) Mostre que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$ e $e^{i2\pi} = 1$. (c) Mostre que $e^{i(x \ln b)} = b^{ix}$. (d) Escreva $\cos x$ e $\text{sen}\, x$ em termos de e^{ix} e e^{-ix}. (e) Demonstre as identidades trigonométricas para $\cos(x+y)$ e $\text{sen}\,(x+y)$ usando a fórmula de Euler. (f) Mostre que $\cos(nx) = 2\cos[(n-1)x].\cos x - \cos[(n-2)x]$ onde n é um número inteiro.

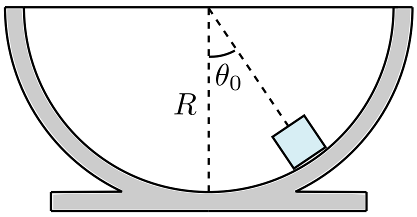
2. Sabemos que a equação diferencial que descreve um oscilador harmônico é escrita como
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$
onde ω é uma constante positiva. (a) Mostre que $x(t) = C_1 e^{i\omega t}$ e $x_2(t) = C_2 e^{-i\omega t}$ são soluções dessa equação diferencial. (b) Mostre que $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ também é uma solução da equação diferencial. (c) Determine os valores de C_1 e C_2 para que $x(t)$ possa ser escrito como $x(t) = a\cos(\omega t) + b\,\text{sen}\,(\omega t)$ com a e b sendo constantes reais. (d) Determine os valores de a e b para que $x(t)$ possa ser escrito como $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.

3. Um oscilador harmônico de massa m e constante elástica k é colocado na posição vertical como mostra a figura abaixo. (a) Determine a posição de equilíbrio y_{eq} do oscilador. (b) Escreva a equação diferencial para a posição vertical $y(t)$ desse oscilador harmônico vertical. (c) Faça a substituição de variáveis $z(t) = y(t) - y_{\text{eq}}$ e, determine a eq. diferencial para $z(t)$. (d) Determine a frequência angular ω para esse oscilador harmônico. Ela depende de g? (e) Determine a solução geral para $z(t)$. (f) Determine a solução para $y(t)$ sabendo que $y(0) = 1.5 y_{\text{eq}}$ e $v_y(0) = 0$. (g) Faça um gráfico para $y(t)$ no caso que $y_{\text{eq}} = 0.5$ m, $k = 10$ N/m e $m = 0.1$ kg.

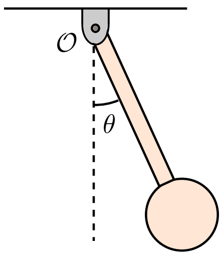
4. Um pedaço de gelo de massa m é largada do repouso da posição deslocada de um ângulo



θ_0 da sua posição de equilíbrio no fundo de recipiente hemisférico de raio R, conforme figura. (a) Determine a eq. diferencial que descreve o movimento $\theta(t)$ do gelo para pequenas amplitudes ($\theta_0 \ll 1$). (b) Determine a frequência de oscilação ω. (c) Determine a solução $\theta(t)$.



5. Um pêndulo real é composto de uma barra delgada de massa $\alpha^2.m$ e comprimento l cuja extremidade livre está soldada a uma esfera de massa m e raio $\alpha.l$, conforme figura abaixo. O pêndulo é livre para oscilar sem atrito em torno de um eixo que passa pelo ponto $\mathcal{O}$. Sabe-se que o momento de inércia do conjunto em relação ao eixo que passa por $\mathcal{O}$ vale $I_{\mathcal{O}} = [(11/15)\alpha^2 + 1]ml^2$, onde α é uma constante positiva. (a) Determine a equação diferencial para o ângulo $\theta(t)$ para qualquer amplitude de movimento. (b) Restringindo-a a pequenas oscilações, escreva a solução geral para $\theta(t)$ e determine sua frequência ω. (c) No limite que $\alpha \to 0$, qual o valor de ω?



6. Um oscilador harmônico amortecido de $m = 0.1$ kg, $k = 1$ N/m e $b = 0.2$ kg/s é liberado da posição de equilíbrio $x(0) = 0.5$ m com velocidade inicial $\dot{x}(0) = -2.0$ m/s. (a) Determine a frequência de oscilação ω. (b) Mostre que a solução geral para esse oscilador é $x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t) + Be^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\mathrm{sen}\,(\omega t)$ e determine A e B em termos das condições iniciais. (c) Faça um gráfico de x como função do tempo.

7. Um objeto de massa m se move ao longo de x sujeito a uma força do tipo $F_x = -2m\omega_0\dot{x} - m\omega_0^2 x$. No instante inicial $t = 0$, sua posição vale $x(0) = x_0$ e sua velocidade vale $v(0) = v_0$. (a) Determine o valor de γ e identifique qual o regime de amortecimento desse objeto. É Sub-crítico, crítico ou super-crítico? (b) Mostre que $x(t) = (A+Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ é a solução geral para esse problema, e determine A e B em termos da condição inicial. (c) Há oscilação? Se sim, qual o seu período? (d) Utilizando algum programa de gráficos, faça um gráfico da função $x(t)$ para o caso que $x_0 = 0$ e $v_0 = 1$ m/s e $\omega_0 = 2$ s^{-1}.

8. A equação diferencial que descreve o movimento de um oscilador forçado é dada por

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

(a) Mostre que para o caso que $\gamma < 2\omega_0$ a solução homogênea é dada por $x_h(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\omega_a t + c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\operatorname{sen}\omega_a t$ é solução da equação homogênea se $\omega_a^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$. (b) Mostre que $x_p(t) = a\cos\omega t + b\operatorname{sen}\omega t$ é solução particular da equação não-homogênea e determine a e b. (c) Mostre que $x_p(t) = R\cos(\omega t - \phi)$ e determine R e ϕ. (d) Mostre que $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ é a solução geral do problema.

9. Um oscilador amortecido de $k = 5$ N/m, $m = 0.5$ kg e $b = 1.0$ kg/s saindo de $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ está sujeito a uma força externa do tipo $F(t) = 50\operatorname{sen}\omega t$ em N. (a) Escreva a solução geral $x(t)$ para o caso que $\omega = 5$ s^{-1}a. (b) Escreva a solução geral $x(t)$ para o caso que $\omega = \sqrt{10}$ s^{-1}. (c) Utilizando algum programa de gráficos, faça num mesmo gráfico as soluções $x(t)$ dos itens a e b de $t = 0$ até $t = 8$ s, identificando a solução ressonante e a não-ressonante.

10. O mesmo oscilador da questão anterior está agora sujeito a uma força externa do tipo $F(t) = 50\cos 10t$ em N. (a) Escreva a solução geral $x(t)$ para o caso que $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = -10$ m/s. (b) Escreva a solução geral $x(t)$ para o caso que $x(0) = 2$ m e $\dot{x}(0) = 0$. (c) Utilizando algum programa de gráficos, faça num mesmo gráfico as soluções $x(t)$ dos itens a e b de $t = 0$ até $t = 8$ s.

11. Sobre a amplitude R da solução estacionária do oscilador forçado. (a) Faça um gráfico de R como função de ω para os casos $\gamma = 0.1\omega_0$, $\gamma = 0.2\omega_0$ e $\gamma = 0.4\omega_0$. (b) Determine qual valor da frequência ω para o qual a amplitude tem seu máximo R para um dado γ. (c) Determine o valor de R para a frequência do item a.

12. Sobre a fase ϕ da solução estacionária do oscilador forçado. (a) Mostre que no limite $\omega \ll \omega_0$ a fase $\phi = 0$. (b) Mostre que no limite $\omega \gg \omega_0$ a fase $\phi = \pi$. (c) Mostre que para $\omega = \omega_0$ a fase $\phi = \pi/2$. (d) Faça um gráfico de ϕ como função de ω para o caso que $\gamma = 0.1\omega_0$.

    Moysés: 3.9, 3.13, 3.17, 3.21, 4.4, 4.9, 4.7, 4.10