

NOTAS DE AULA - PROF. ELVIS

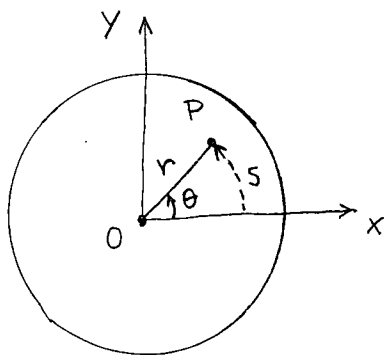
CAP. 9 ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

- 9.1. POSIÇÃO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO ANGULARES
- 9.2. CINEMÁTICA ROTACIONAL
- 9.3. GRANDEZAS ANGULARES E LINEARES
- 9.4. ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO
- 9.5. CÁLCULO DE MOM. DE INÉRCIA
- 9.6. TORQUE
- 9.7. RELAÇÃO ENTRE TORQUE E ACEL. ANGULAR
- 9.8. TRABALHO E ENERGIA NA ROTAÇÃO
- 9.9. ROLAMENTO

CORPO RÍGIDO $\Rightarrow$ objeto indeformável, ou seja, as posições relativas de todas as partículas que o compõem permanecem constantes durante qualquer movimento.

9.1. POSICÃO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO ANGULARES

Consideremos um disco rígido centrado num sistema de coordenadas cartesianas como mostra a figura.



Podemos representar o ponto P num sist. cartesiano como sendo o par ordenado (x, y) , porém podemos usar o sistema de coordenadas polares onde representaremos o ponto com o par ordenado (r, θ) .

Nessa representação, apenas a coordenada θ muda com o tempo numa rotação, de tal maneira que podemos escrever:

$$\boxed{s(t) = r \cdot \theta(t)} \quad (1)$$

ou ainda, podemos escrever $\theta(t) = s(t)/r$ que define a unidade de medida angular radiano, que pode ser relacionada com graus angulares na forma:

$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

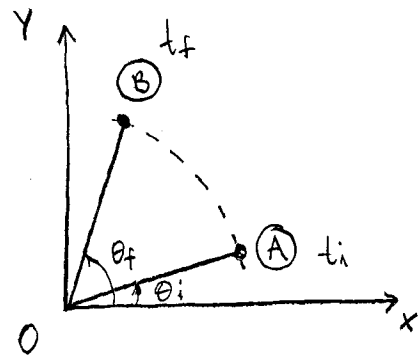
de tal maneira que $1 \text{ rad} = 360^\circ / 2\pi \approx 57,3^\circ$.

Além disso, como o disco é rígido, se o ponto P se desloca de um ângulo θ podemos concluir que todos os outros pontos se deslocam do mesmo θ . Assim, θ pode ser associado ao corpo.

Admitimos que o ponto P, pertencente ao corpo, viaja da posição (A) para a posição (B) num intervalo de tempo Δt , como mostra a figura.

O deslocamento angular será dado por:

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i \quad [\text{rad}] \quad (2)$$



A velocidade angular média entre esses dois pontos pode ser calculada via:

$$\bar{\omega}_{t_i t_f} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad [\text{rad/s}] \quad (3)$$

assim, se o disco gira rapidamente, $\Delta\theta$ ocorre num pequeno Δt , já se o giro é lento, $\Delta\theta$ ocorre num grande Δt .

A velocidade angular instantânea é definida como o limite de $\bar{\omega}$ quando $\Delta t \rightarrow 0$, então:

$$\omega(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad [\text{rad/s}] \quad (4)$$

Ainda, se a velocidade angular varia de ω_i até ω_f no intervalo de tempo Δt , o objeto tem aceleração angular.

A aceleração angular média pode então ser calculada como:

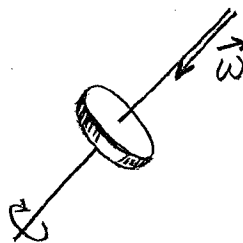
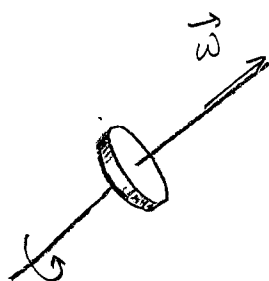
$$\bar{\alpha}_{t_i, t_f} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad [\text{rad/s}] \quad (5)$$

Enquanto que a aceleração angular instantânea é definida como o limite de $\bar{\alpha}$ quando $\Delta t \rightarrow 0$, então

$$\alpha(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad [\text{rad/s}^2] \quad (6)$$

Assim, para um corpo rígido girando sobre um eixo fixo, todas as partículas que o compõem realizam o mesmo deslocamento angular, e têm as mesmas velocidades e acelerações angulares.

Acima de tudo, ambas velocidade e aceleração angular são vetores e tem de ser levado em conta seus caracteres vectoriais na rotação (direção e sentido dos vetores)



A direção do vetor $\vec{\omega}$ é dada pela regra da mão-direita

A direção de $\vec{\alpha}$ é dada por $d\vec{\omega}/dt$, de modo que se $\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$ teremos $|\vec{\omega}|$ crescente, enquanto que se $\vec{\alpha} \parallel -\vec{\omega}$ teremos $|\vec{\omega}|$ decrescente.

9.2. CINEMÁTICA ROTACIONAL: MOV. DE ROTAÇÃO COM ACELERAÇÃO ANGULAR CONSTANTE.

Para uma rotação em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante, temos que $\alpha(t) = \alpha$ (constante)

Usando a eq. (6), podemos escrever $d\omega = \alpha dt$, e integrando esta equação desde o instante inicial $t_i = 0$ até $t_f = t$ teremos

$$\int_{\omega(0)}^{\omega(t)} d\omega = \int_0^t \alpha dt$$

como α é constante, podemos tirá-lo da integral. Além disso, utilizaremos a notação usual que $\omega(0) = \omega_0$, e assim ficamos com:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha \cdot t \quad (7)$$

Usando a eq. (4), podemos escrever $d\theta = \omega(t) dt$, e integrando-a teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} d\theta &= \int_0^t \omega(t) dt \\ &= \int_0^t (\omega_0 + \alpha \cdot t) dt \end{aligned}$$

lembrando que α é constante e usando a notação usual que $\theta(0) = \theta_0$, ficamos com:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (8)$$

As eqs. (7) e (8), válidas somente quando α é constante, são semelhantes às equações do MRUV, de modo que podemos relacioná-las através da eq. (1).

$$s \rightarrow \theta$$

$$v \rightarrow \omega$$

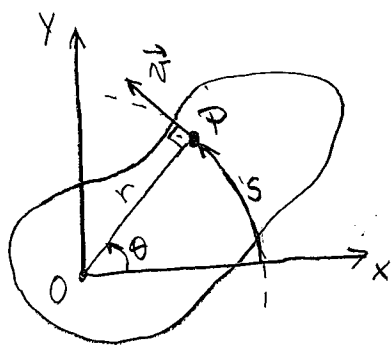
$$a \rightarrow \alpha$$

Assim, podemos escrever uma equação semelhante a eq. de Torricelli na forma:

$$\omega(t)^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \cdot \Delta\theta \quad (9)$$

9.3. GRANDEZAS ANGULARES E LINEARES

Quando um corpo rígido gira ao redor de um eixo fixo, todas as partículas do corpo se movem num círculo cujo centro está no eixo de rotação.



Da eq. (1) lembramos que $s(t) = r\theta(t)$, e derivando essa eq. no tempo temos:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{dr}{dt} \theta(t) + r \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

e como $\omega = d\theta(t)/dt$, podemos escrever:

$$\boxed{v(t) = r \cdot \omega(t)} \quad (10)$$

que é a velocidade tangencial de uma partícula que está situada a uma distância r do centro de rotação.

Podemos derivar essa nossa equação e calcular a aceleração tangencial de rotação naquele ponto do corpo rígido.

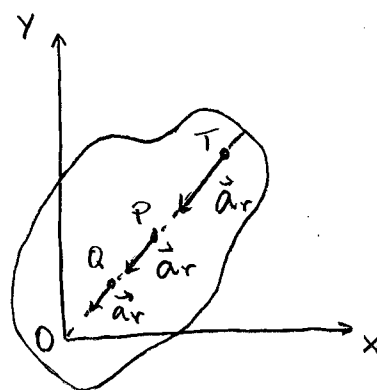
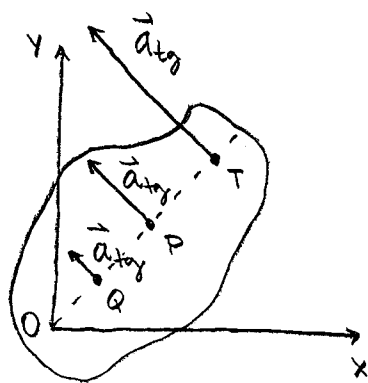
$$a_{tg}(t) = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

e lembrado que $\alpha(t) = d\omega/dt$, podemos escrever

$$a_{tg}(t) = r \cdot \alpha(t) \quad (\Delta 1)$$

E como vimos nos nossos estudos de movimento circular, uma partícula em movimento circular experimenta uma aceleração radial denominada aceleração centrípeta:

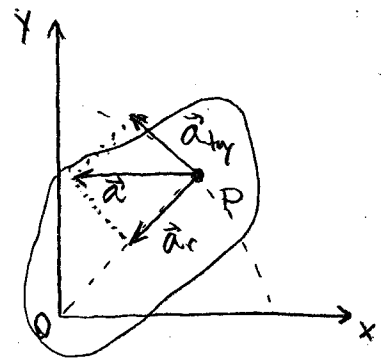
$$a_r(t) = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad (\Delta 2)$$



Notemos que ambas acelerações (radial e tangencial) aumentam conforme se afasta do eixo de rotação, ou seja, conforme se aumenta r , se aumentam a_{tg} e a_r na mesma proporção.

A aceleração total no ponto P será dada pela composição dessas duas acelerações:

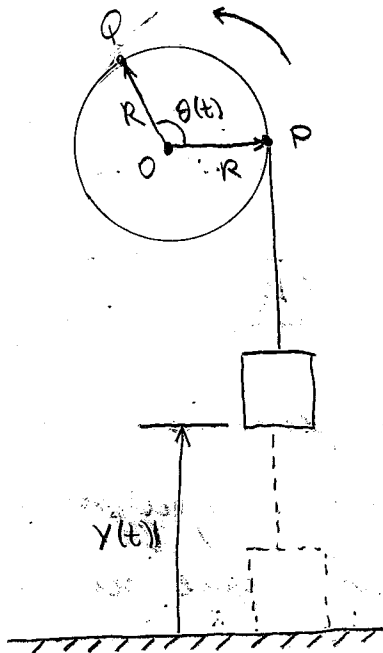
$$\vec{a} = \vec{a}_{tg} + \vec{a}_r$$



cujos módulos pode ser calculado má:

$$a = \sqrt{a_{tg}^2 + a_r^2} = \sqrt{(r\alpha)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

EXEMPLO: CORPO ERGUIDO POR UM ROTOR



Vamos estudar o caso de um cilindro em rotação que suspenso um bloco.

No instante inicial o bloco está no solo e o ponto Q estava na posição do ponto P, e ao girar de um ângulo θ , o ponto Q passa a ter uma nova posição, enquanto que o bloco sobe uma altura y .

O arco PQ tem o mesmo comprimento do fio que sobe, então:

$$y(t) = R \cdot \theta(t)$$

derivando:

$$v_{bloco} = \frac{dy}{dt} = R \cdot \frac{d\theta}{dt} = R \cdot \omega_{cilindro}$$

de modo que

$$v_{bloco} = R \cdot \omega_{cilindro}$$

Assim, a velocidade de subida do bloco é igual a velocidade tangencial da periferia do cilindro.

Derivando aquela equação, temos:

$$a_{\text{bloco}} = \frac{dv_{\text{bloco}}}{dt} = R \cdot \frac{d\omega_{\text{cil}}}{dt} = R \cdot \alpha_{\text{cil}}.$$

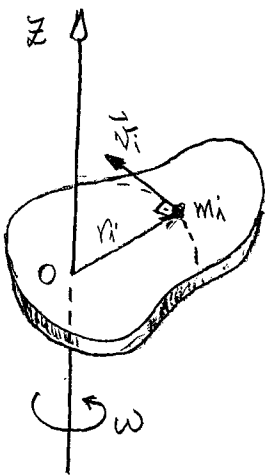
então:

$$a_{\text{bloco}} = R \cdot \alpha_{\text{cil}}.$$

Assim, a aceleração do bloco é igual a aceleração tang. da periferia do cilindro.

9.4. ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

Um objeto girando sobre um eixo fixo permanece estacionário no espaço, de modo que não há nenhuma energia cinética associada à translação. Porém, as partículas que compõem o objeto estão em mov. circular, de modo que há uma energia cinética associada ao mov. de rotação.



Consideremos a rotação de um corpo rígido em torno do eixo z , com vel. ang. ω .

A energia cinética de uma partícula de massa m_i e distância ao eixo r_i será:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

A energia cinética total do corpo será então dada como a soma da energia cinética de todas as partículas que o compõem.

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

onde usamos que $v_i = r_i \cdot \omega$. Como ω é o mesmo para todo o corpo, podemos escrever:

$$K_R = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

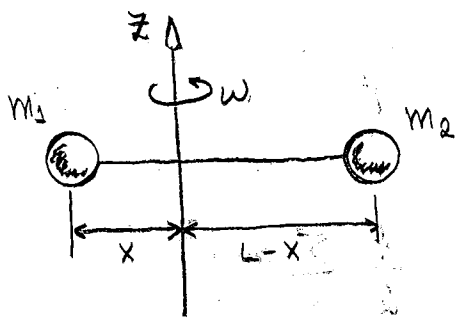
A qtd. entre parênteses é então a inércia de rotação (semelhante a massa que é a inércia da translação), que vamos definir como momento de inércia do corpo com relação ao eixo Oz .

$$\boxed{I_z = \sum_i m_i r_i^2} \quad [\text{Kg} \cdot \text{m}^2] \quad (13)$$

Desta forma, a energia cinética de rotação do corpo pode ser escrita como:

$$\boxed{K_R = \frac{1}{2} I_z \omega^2} \quad (14)$$

EXEMPLO: HALTERES EM ROTAÇÃO



Vamos calcular o mom. de inércia do sistema com relação ao eixo z .

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 x^2 + m_2 (L-x)^2$$

Além disso, vamos determinar x_0 de tal maneira que I_z seja o menor possível.

Para que o mom. de inércia seja mínimo, podemos calcular x_0 através de:

$$\frac{dI_z}{dx} = 0 \Rightarrow 2m_1 x_0 + 2m_2 (L-x_0) \cdot (-1) = 0$$

$$(m_1 + m_2) \cdot x_0 = m_2 L \Rightarrow x_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot L$$

Obs: Note que x_0 é o próprio eixo que passa pelo C.M., ou seja, o mom. de inércia é mínimo para um eixo que passa pelo CM.

$$I_{cm} = m_1 x_{cm}^2 + m_2 (L-x_{cm})^2 = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) L^2$$

no caso em que $m_1 = m_2$, temos $I_{cm} = m_1 L^2 / 2$.

9.5. CÁLCULO DE MOMENTO DE INÉRCIA

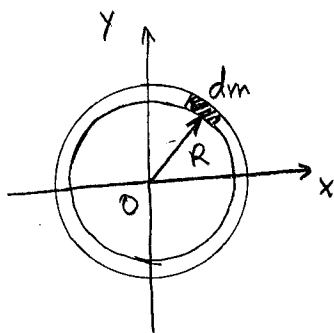
Podemos calcular o mom. de inércia de um corpo rígido apenas imaginando o objeto como sendo composto por vários elementos de volume, cada um com massa Δm .

Desta forma, para uma distribuição contínua de massa, o momento de inércia pode ser calculado por:

$$I_o = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm \quad (15)$$

e de fato, podemos escrever $dm = \rho dV$ onde ρ é a densidade do material, de modo que $I_o = \int \rho \cdot r^2 \cdot dV$.

EXEMPLO: ANEL DELGADO



O mom. de inércia pode ser calculado pela eq. (15) na forma:

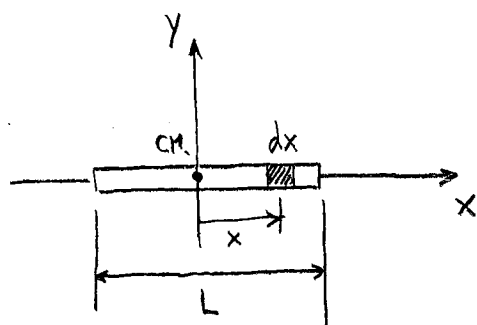
$$I_z = \int r^2 dm$$

como todos os elementos de massa estão a uma distância R do eixo de rotação, temos:

$$I_z = R^2 \int dm = MR^2$$

onde por último identificamos que $M = \int dm$ é a massa do anel.

EXEMPLO: BARRA DELGADA



Vamos calcular o mom. de inércia da barra em torno do eixo y que passa pelo C.M. usando a eq. (15).

A massa de um pedaço dx da barra é:

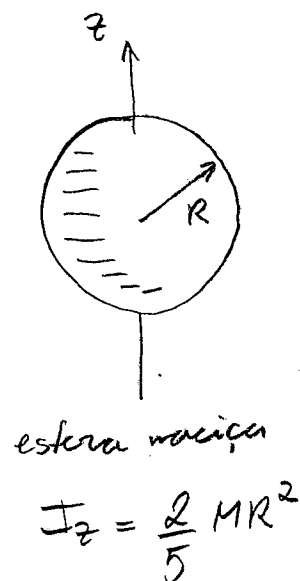
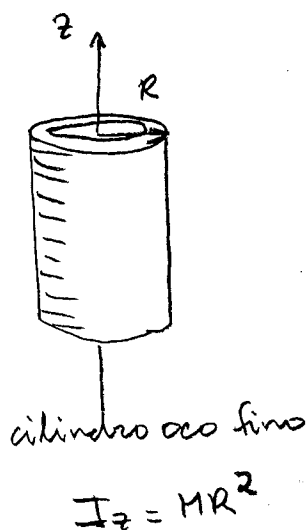
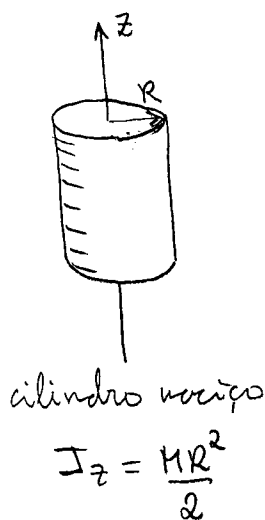
$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} \cdot dx$$

dens. linear
de massa

de modo que:

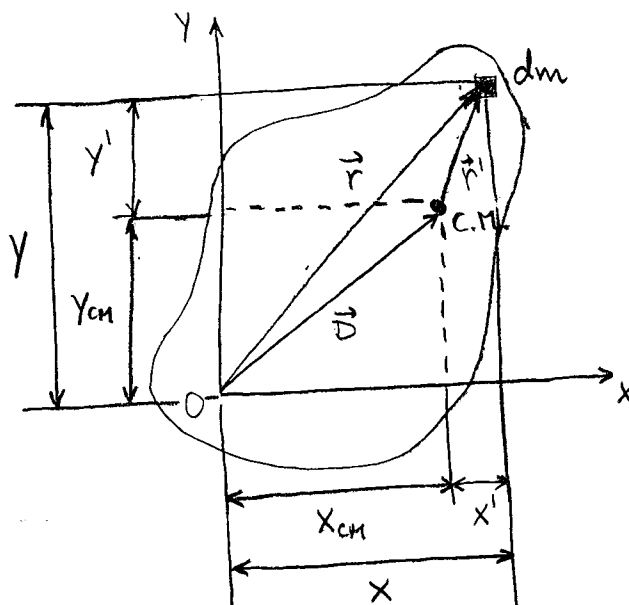
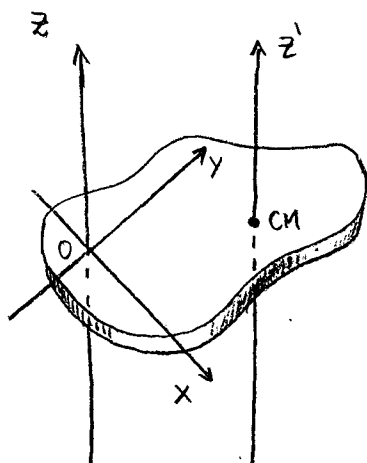
$$\begin{aligned} I_y &= \int r^2 dm = \int x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \left(\frac{M}{L} dx \right) = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2 \end{aligned}$$

Outros momentos de inércia com relação ao eixo que passa pelo C.M.



Momentos de inércia com relação a outros eixos podem ser complicados de calcular.

Para facilitar os cálculos podemos usar o teorema dos eixos paralelos. Vamos à prova desse teorema.



Vamos calcular o mom. de inércia desse corpo com relação ao eixo z , usando o já conhecido mom. de inércia de um eixo paralelo a z que passa pelo C.M. Então, da eq. (15)

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

mas como $x = x' + x_{cm}$ e $y = y' + y_{cm}$ da figura, temos:

$$I_z = \int [(x' + x_{cm})^2 + (y' + y_{cm})^2] dm$$

$$= \underbrace{\int (x'^2 + y'^2) dm}_{= I_{cm}} + \cancel{2x_{cm} \int x' dm} + \cancel{2y_{cm} \int y' dm} + \underbrace{(x'^2 + y'^2) \int dm}_{= MD^2}$$

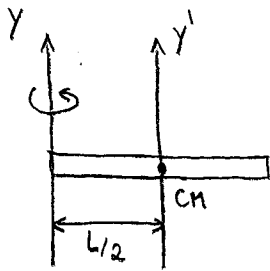
(definição do C.M.) (definição do C.M.)

Assim, concluímos que:

$$\boxed{I_z = I_{cm} + MD^2} \quad (16)$$

onde D é a distância entre os eixos paralelos.

EXEMPLO: BARRA GIRANDO NUMA EXTREMIDADE



Sabemos que para uma barra delgada:

$$I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$$

e usando o teorema dos eixos paralelos:

$$I_y = I_{cm} + MD^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$