Universidade Federal do Rio de Janeiro — Instituto de Física

Física I — IGM1 — 2014/1

Cap. 7 - Momento Linear e Impulso

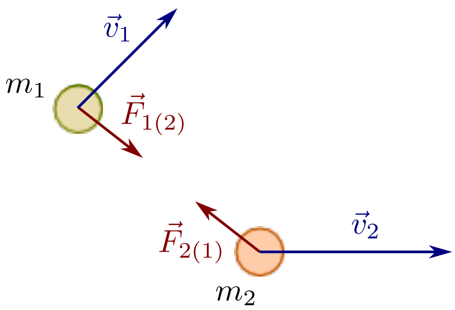
Prof. Elvis Soares

Consideremos o seguinte problema: ao atirar um projétil de um canhão qual será a velocidade de recuo do mesmo?

Essa é uma pergunta muito difícil de ser respondida utilizando-se as Leis de Newton devido à falta de informação incial do problema.

1 Momento Linear

Consideremos um sistema de duas partículas isoladas com massas m_1 e m_2, com velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ respectivamente.



Da Terceira Lei de Newton sabemos que as forças de interação $\vec{F}_{1(2)}$ e $\vec{F}_{2(1)}$ forma um par ação-reação $\vec{F}_{1(2)} = -\vec{F}_{2(1)}$, de modo que

$$\vec{F}_{1(2)} + \vec{F}_{2(1)} = 0$$

e usando a Segunda Lei de Newton, podemos escrever

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$

como m_1 e m_2 são constantes ao longo do tempo:

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = 0$$

e com isso

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \tag{1}$$

Assim, como a derivada é nula, $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ deve ser uma grandeza conservada durante todo o processo de interação entre os corpos, independendo de qual tipo de interação ocorre.

O **momento linear** é definido pelo produto da massa pela velocidade de um corpo, sendo assim uma grandeza vetorial, com direção e sentido, cujo módulo é o produto da massa pelo módulo da velocidade, e cuja direção e sentido são os mesmos da velocidade.

$$\boxed{\vec{p} := m\vec{v}} \tag{2}$$

e em termos de componentes cartesianas é escrito como

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y \text{ e } p_z = mv_z \tag{3}$$

A Segunda Lei de Newton pode também ser escrita utilizando-se o momento linear na sua composição. De fato, sabemos que

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

e usando o fato que m é constante para um corpo qualquer, então $\sum \vec{F} = d(m\vec{v})/dt$ e assim

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \tag{4}$$

Portanto, *a taxa de variação do momento linear de uma partícula é igual a soma das forças que atuam sobre ela, ou seja, igual a força resultante que nela atua.*

2 Conservação do Momento Linear

Voltando à Eq.(1), e usando a definição do momento linear, podemos escrever agora que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

e denominando $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \equiv \vec{p}_{\text{tot}}$, isto é, o momento linear total do sistema de duas partículas, temos

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constante}$$

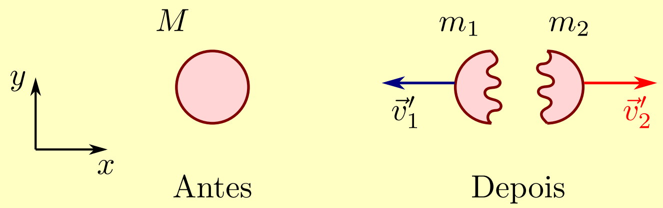
que equivale a dizer que

$$\boxed{\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}} \tag{5}$$

O momento linear total de duas partículas é conservado quando há somente forças de interação mútuas entre elas.

Exemplo: Explosão em dois fragmentos

Consideremos uma explosão de um corpo de massa M em dois fragmentos de massa m_1 e m_2, de modo que $m_1 + m_2 = M$, conforme a figura.



Queremos determinar qual a relação entre $\vec{v}_2'$ e $\vec{v}_1'$ imediatamente após a explosão. Para isso, vamos lembrar o fato que após a explosão ambos os fragmentos são empurrados mutuamente, de modo que a força total sobre o sistema $m_1 + m_2$ é nula, e o momento linear total é conservado.

$$\sum \vec{F}_{\text{sis}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{tot},i} = \vec{p}_{\text{tot},f}$$

calculando os momentos lineares totais antes e depois da explosão, temos

$$0 = m_2 v_2' - m_1 v_1' \tag{6}$$

e assim

$$\boxed{v_2' = \frac{m_1}{m_2} v_1'} \tag{7}$$

Vamos agora calcular as energias cinéticas antes e depois da explosão, como segue

$$K_i = 0$$

$$K_f = \frac{m_1 {v_1'}^2}{2} + \frac{m_2 {v_2'}^2}{2} = \frac{m_1 {v_1'}^2}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

Vemos então que $K_f > 0$, e assim $\Delta K > 0$, que nos diz que a energia cinética é criada durante a explosão.

$$\boxed{\Delta K = \frac{m_1 {v_1'}^2}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} \tag{8}$$

Desafio: De onde surge a energia cinética, uma vez que a energia total do sistema tem que se conservada?

3 Impulso

Vimos anteriormente, a partir da segunda Lei de Newton, que $\vec{F}_R = d\vec{p}/dt$, e podemos integral essa equação durante o intervalo de tempo em que atua tal força, onde

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_R dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} dt$$

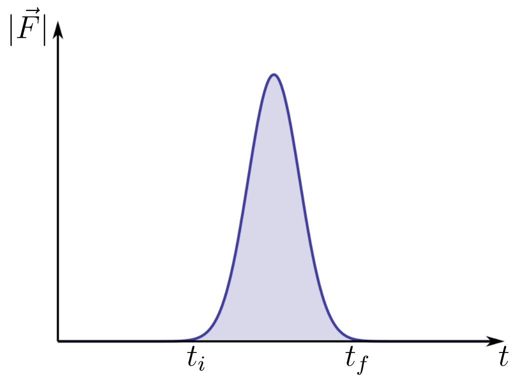
e a última integral pode facilmente ser efetuada como

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_R dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} \tag{9}$$

Assim, temos uma grandeza física relacionada ao momento linear que chamaremos de **impulso**. O impulso $\vec{I}$ agindo em um corpo é uma grandeza vetorial que representa o total de força aplicada a este corpo $\vec{F}$ em um dado intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_i$, como expresso pela seguinte equação

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt} \tag{10}$$

Desta forma, uma força que varia ao longo do tempo produz um impulso que é a área sob o gráfico de força como funçao do tempo, conforme figura abaixo.



Exemplo: Colisão entre duas bolas

Vamos considerar o problema de duas bolas de massas m_1 e m_2 em colisão, conforme mostra a figura.

Sabemos que durante a colisão, a bola 1 empurra a bola 2 para a direita e a bola 2 reage empurrando a bola 1 para a esquerda, com $\vec{F}_{2(1)} = -\vec{F}_{1(2)}$, então os momentos lineares de ambas deve estar relacionado via Segunda Lei de Newton

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{1(2)} = -\vec{F}_{2(1)} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

e integrando essas equações durante o tempo de colisão, temos o teorema do impulso para cada bola independentemente:

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}_1}{dt} dt = \Delta\vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{1(2)} dt = \vec{I}_1$$
$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}_2}{dt} dt = \Delta\vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{2(1)} dt = \vec{I}_2$$

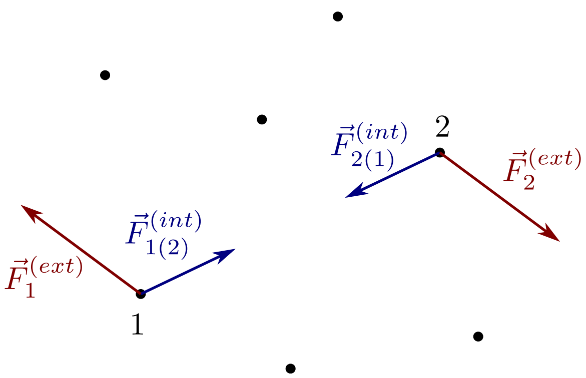
E da igualdade acima vemos que

$$\boxed{\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 0} \tag{11}$$

Assim, a soma do momento linear das duas bolas não varia durante a colisão pois a soma dos impulsos entre ambas é nula. Fato que reafirma a **conservação do momento linear** durante esse tipo de colisão.

4 Sistema de Partículas

Para um sistema de partícula, um conjunto de muitos corpos interagentes e sob à ação de forças externas, o momento linear total do sistema será a soma de todos os momentos lineares individuais de cada partícula pertencente àquele.



$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = \sum_i \vec{p}_i \tag{12}$$

E usando a Segunda Lei de Newton:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} &= \vec{F}_{R,1} + \vec{F}_{R,2} + \cdots + \vec{F}_{R,n} = \sum_i \vec{F}_{R,i} \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{(\text{int})} + \sum_i \vec{F}_i^{(\text{ext})} \end{aligned} \tag{13}$$

As forças internas são canceladas aos pares devido à natureza do par ação-reação, $\sum_i \vec{F}_i^{(\text{int})} = 0$, de modo que somente as forças externas produzem variação do momento linear total do sistema.

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i^{(\text{ext})} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt}} \tag{14}$$

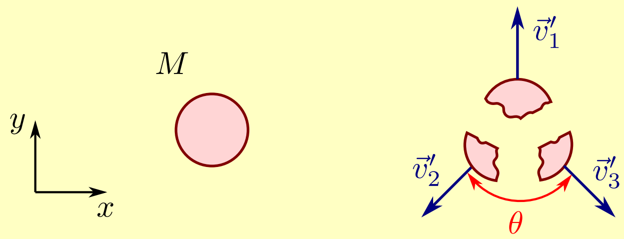
Assim, num sistema de partículas, a variação do momento linear total desse sistema é devido à força externa total que age sobre esse mesmo sistema.

No caso em que a força externa total é nula, o momento linear total do sistema se conserva.

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i^{(\text{ext})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = 0} \tag{15}$$

Exemplo: Explosão em três fragmentos

Vamos considerar o problema de um corpo de massas M explodindo em três fragmentos de massas iguais lançados com velocidades de mesmo módulo v, e um dos fragmentos tem velocidade na diração vertical para cima, conforme mostra a figura.



Antes Depois

Como durante a explosão não existem forças externas atuando sobre o sistema, temos a conservação do momento linear

$$0 = \frac{M}{3}\vec{v}_1' + \frac{M}{3}\vec{v}_2' + \frac{M}{3}\vec{v}_3'$$

que simplificando fica

$$0 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' + \vec{v}_3'$$

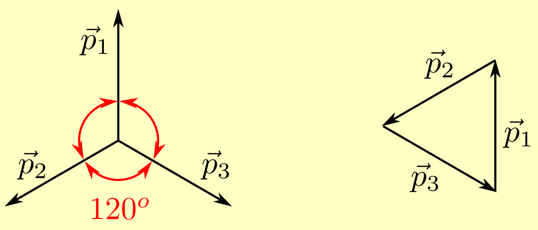
calculando o módulo de $\vec{v}_1'$, podemos escrever

$$v_1'^2 = v_2'^2 + v_3'^2 + 2v_2'v_3'\cos\theta$$

e como todos os fragmentos saem com o mesmo módulo da velocidade $v_1' = v_2' = v_3'$, de modo que $\cos\theta = -1/2$, e portanto

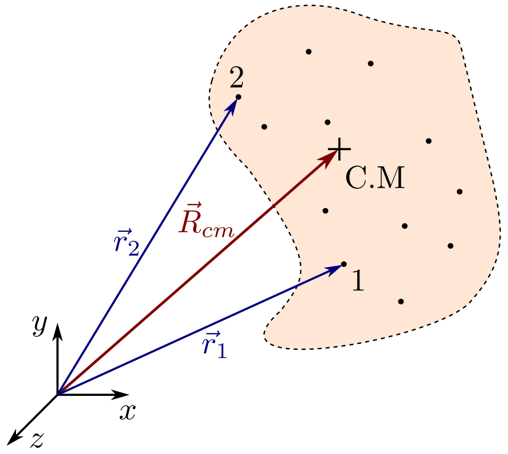
$$\theta = 120° \tag{16}$$

Assim, os três vetores momentos lineares formam geometricamente um triângulo equilátero, conforme a figura a seguir.



5 Centro de Massa

Podemos associar ao sistema um ponto específico denominado **centro de massa** (ou simplesmente C.M.), que seria a localização de toda a massa do sistema se concentrada num ponto apenas.



$$M\vec{R}_{\text{cm}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n = \sum_i m_i\vec{r}_i$$

ou seja

$$\boxed{\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}} \tag{17}$$

onde $M = \sum_i m_i$ é a massa total do sistema e $\vec{r}_i$ é o vetor posição da i-ésima partícula.

A velocidade do C.M. pode ser facilmente calculada por $\vec{V}_{\text{cm}} = d\vec{R}_{\text{cm}}/dt$, então escrevemos

$$\boxed{\vec{V}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{M}} \tag{18}$$

***Mostre!**

sendo ainda escrito mais facilmente como $M\vec{V}_{\text{cm}} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_{\text{tot}}$.

Ou seja, o momento linear total do sistema é igual a sua massa total multiplicada pela velocidade do seu C.M.

Também podemos determinar a aceleração do C.M. a partir de $\vec{A}_{\text{cm}} = d\vec{V}_{\text{cm}}/dt$, como:

$$\boxed{\vec{A}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i\vec{a}_i}{M}} \tag{19}$$

***Mostre!**

e rearranjando, podemos escrever na forma $M\vec{A}_{\text{cm}} = \sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_{R,i} = \sum_i \vec{F}_i^{(\text{ext})}$.

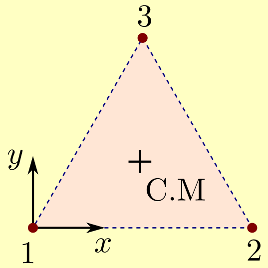
Portanto, o centro de massa de um sistema de partículas se move como uma partícula equivalente de massa M que se moveria sob à ação da força externa total do sistema.

E se a força externa total é nula, há conservação do momento linear total, e o C.M. fica em equilíbrio.

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i^{(\text{ext})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{tot}} = M\vec{V}_{\text{cm}} = \text{constante}} \tag{20}$$

Exemplo: Triângulo

Vamos considerar o problema de três partículas de massas iguais que se encontram nos vértices de um triângulo equilátero de lado l, conforme mostra a figura.



O vetor posição de cada partícula nessa sistema de coordenadas.

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= 0\hat{x} + 0\hat{y} \\ \vec{r}_2 &= l\hat{x} + 0\hat{y} \\ \vec{r}_3 &= \frac{l}{2}\hat{x} + \frac{l\sqrt{3}}{2}\hat{y} \end{aligned}$$

O centro de massa dessa configuração pode ser calculado pela própria definição $\vec{R}_{\mathrm{cm}} = \sum_i m_i\vec{r}_i/M$, onde M é a soma das três massas.

$$\vec{R}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{3m}(m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2 + m\vec{r}_3) \tag{21}$$

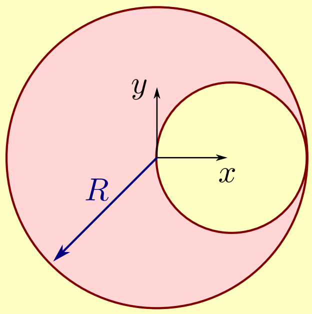
Portanto, o centro de massa para um sistema de três partículas de massas iguais que se encontram nos vértices de um triângulo equilátero de lado l é

$$\boxed{\vec{R}_{\mathrm{cm}} = \frac{l}{2}\hat{x} + \frac{l\sqrt{3}}{6}\hat{y}} \tag{22}$$

Para um corpo sólido, para o qual tem-se uma distribuição contínua de massa com $dm = \rho dV$, as somas indicadas nas equações do centro de massa devem ser substituídas por integrais. Para um corpo homogêneo, o centro de massa coincide com o centro geométrico; quando um corpo possui um eixo de simetria, o centro de massa está sempre situado nesse eixo; e não há nada que obrigue o centro de massa estar na parte maciça do corpo.

Exemplo: Chapa Furada

Vamos considerar o problema de uma chapa homogênea circular de raio R tem um pedaço circular de raio $R/2$ retirado, conforme mostra a figura.



O vetor posição do C.M do disco inteiro sem o furo era $\vec{r}_{\text{disco}} = 0$, enquanto que o vetor posição do C.M do furo é $\vec{r}_{\text{furo}} = (R/2)\hat{x}$.
A massa do disco inteiro sem o furo era $m_{\text{disco}} = \sigma(\pi R^2)$, enquanto que a massa do furo é $m_{\text{furo}} = -\sigma(\pi R^2/4)$, que deve ser negativa pois trata-se de um furo, e σ é a densidade superficial de massa.

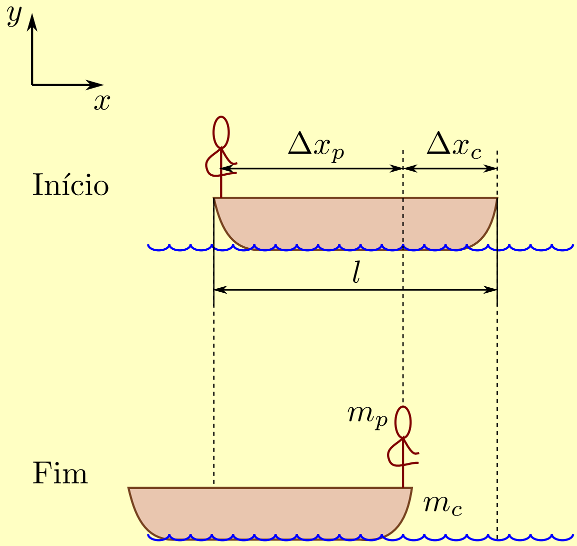
O centro de massa dessa chapa com o furo pode ser calculado pela definição $\vec{R}_{\text{cm}} = \sum_i m_i \vec{r}_i / M$, levando em consideração que a massa do furo é negativa, e assim

$$\boxed{\vec{R}_{\text{cm}} = -\frac{R}{6}\hat{x}} \tag{23}$$

***Mostre!**

Exemplo: Pescador e Canoa

Vamos considerar o problema de pescador de massa m_p andando de uma extremidade a outra de uma canoa de massa m_c e comprimento l, conforme mostra a figura.



Enquanto o pescador anda sobre a canoa não existem forças externas atuando sobre o sistema (pescador+canoa), isso desprezando a resistência da água ao movimento da canoa, de modo que temos a conservação do momento linear

$$0 = m_p v_p - m_c v_c$$

que em termos da velocidade média, podemos escrever

$$0 = m_p \frac{\Delta x_p}{\Delta t} - m_c \frac{\Delta x_c}{\Delta t}$$

Assim, ficamos claramente com uma relação entre os deslocamentos do pescador e da canoa.

$$m_p \Delta x_p = m_c \Delta x_c \tag{24}$$

Vemos então que para o momento linear total do sistema ser conservado, ao pescador andar para a direita em direção à outra extremidade, a canoa anda para a esquerda na diração do pescador. E além disso, os deslocamentos somados de ambos deve ser o próprio comprimento da canoa.

$$\Delta x_p + \Delta x_c = l \tag{25}$$

Usando essas duas relações entre os delocamentos do pescador, Δx_p, e da canoa, Δx_c, podemos determinar qual foi o deslocamento do pescador para ir de uma extremidade a outra da canoa:

$$\boxed{\Delta x_p = \frac{m_c}{m_c + m_p} l} \tag{26}$$