Universidade Federal do Rio de Janeiro — Instituto de Física

Física I — IGM1 — 2014/1

Cap. 6 - Energia Potencial e Conservação da Energia Mecânica

Prof. Elvis Soares

1 Energia Potencial

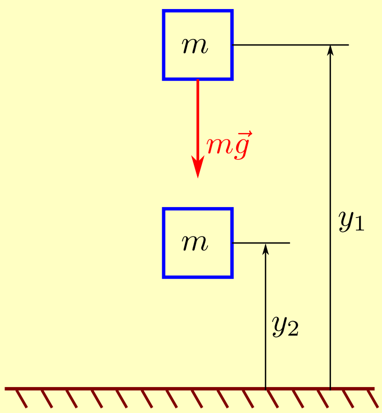
A energia potencial é o nome dado a forma de energia quando está "armazenada", isto é, que pode a qualquer momento manifestar-se, por exemplo, sob a forma de movimento.

Além disso, a energia potencial está relacionada com a posição que o determinado corpo ocupa no espaço devido a sua interação com outros corpos.

1.1 Energia Potencial Gravitacional

Energia associada a altura (posição) do corpo com relação à Terra (ou outro corpo gravitacional).

Exemplo: Corpo em Queda Livre



Consideremos um corpo em queda livre, que cai de uma altura y_1 até uma altura y_2.

$$W_{\text{grav}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{grav}} \cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2} (-mg)dy = -mg(y_2 - y_1)$$

de modo que o trabalho da força peso é dado por

$$\boxed{W_{\text{grav}} = mg(y_1 - y_2)} \tag{1}$$

Assim, podemos definir uma energia associada com a altura do objeto com relação ao solo como sendo:

$$\boxed{U_{\text{grav}} := mgy} \tag{2}$$

Desta forma, podemos escrever o trabalho da força peso, como visto no exemplo, na forma

$$W_{\text{grav}} = U_i - U_f = -(U_f - U_i) = -\Delta U_{\text{grav}} \Rightarrow \begin{cases} \Delta U_{\text{grav}} > 0 & \text{subida} \\ \Delta U_{\text{grav}} < 0 & \text{descida} \end{cases} \tag{3}$$

no caso em que a única força que atua no corpo é a força peso, então **se a força resultante for apenas a força peso**, temos

$$W_R = W_{\text{grav}} = \Delta K = -\Delta U_{\text{grav}} \;\Rightarrow\; K_f - K_i = -(U_f - U_i)$$

então

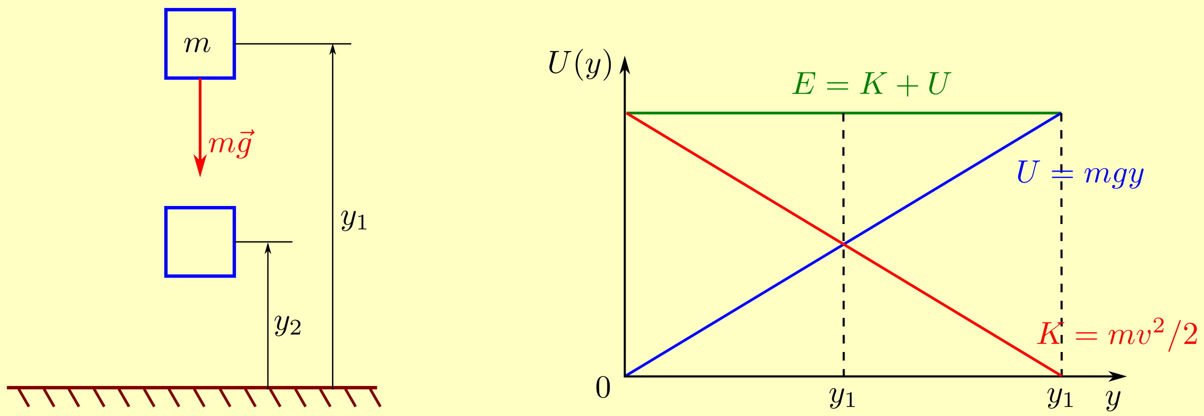
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

Ou seja, *algo se conserva*, sendo essa soma de $K + U_{\text{grav}}$ o que denominaremos de **energia mecânica**:

$$\boxed{E := K + U_{\text{grav}}} \tag{4}$$

Voltando...

Durante o movimento de queda livre, podemos notar que a nergia mecânica é mantida constante durante a descida do corpo desde a altura y_1 até $y = 0$.

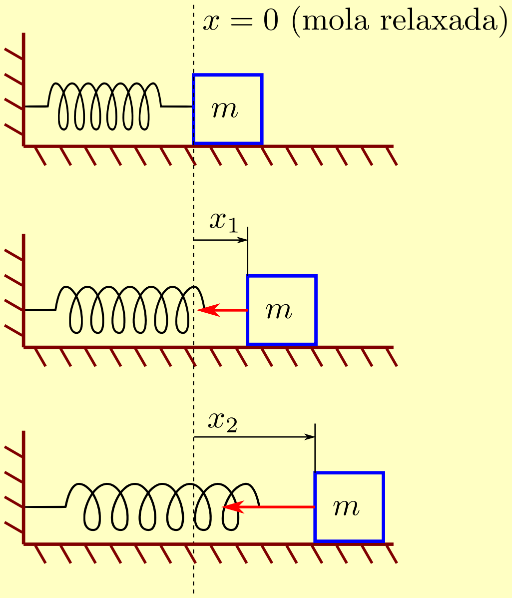


Tal resultado é importantíssimo, uma vez que pode ser entendido como uma mudança de energia, a energia potencial gravitacional está sendo convertida em energia cinética durante a queda!

1.2 Energia Potencial Elástica

Energia armazenada num corpo deformável, dito elástico. Obedecendo a famosa lei de Hooke.

Exemplo: Mola Esticada



Consideremos uma mola sendo esticada de uma posição x_1 até x_2.

$$W_{\text{el}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{el}} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx = -k\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right)$$

de modo que o trabalho da força elástica é dado por

$$\boxed{W_{\text{el}} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}} \tag{5}$$

Assim, podemos definir uma energia associada com a deformação da mola com relação ao seu comprimento natural como sendo:

$$\boxed{U_{\text{el}} := \frac{kx^2}{2}} \tag{6}$$

Desta forma, podemos escrever o trabalho da força elástica, como visto no exemplo, na forma

$$W_{\text{el}} = U_i - U_f = -(U_f - U_i) = -\Delta U_{\text{el}} \Rightarrow \begin{cases} \Delta U_{\text{el}} > 0 & \text{esticando} \\ \Delta U_{\text{el}} < 0 & \text{comprimindo} \end{cases} \tag{7}$$

no caso em que a única força que atua no corpo é a força elástica, então **se a força resultante for apenas a força elástica**, temos

$$W_R = W_{\text{el}} = \Delta K = -\Delta U_{\text{el}} \;\Rightarrow\; K_f - K_i = -(U_f - U_i)$$

então

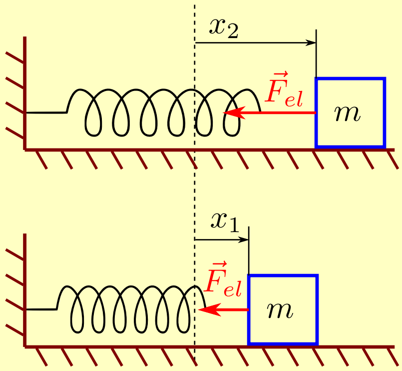
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

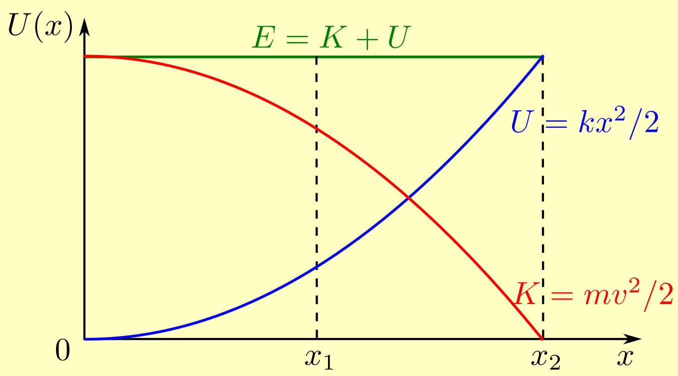
Ou seja, nesse caso a **energia mecânica** é:

$$\boxed{E := K + U_{\text{el}}} \tag{8}$$

Voltando...

Durante a compressão da mola, a energia mecânica fica constante durante todo o processo desde a posição x_2 até x_1.





Novamente esse resultado é importantíssimo, uma vez que pode ser entendido como uma mudança de forma da energia, a energia potencial elástica está sendo convertida em energia cinética durante a queda!

No caso mais geral, onde há mais forças além da força peso e da força elástica, podemos calcular o trabalho total como

$$W_{\text{Total}} = W_{\text{grav}} + W_{\text{el}} + W_{\text{demais}} = \Delta K \tag{9}$$

usando que $W_{\text{grav}} = -\Delta U_{\text{grav}}$ e $W_{\text{el}} = -\Delta U_{\text{el}}$, podemos escrever

$$K_i + U_{\text{grav},i} + U_{\text{el},i} + W_{\text{demais}} = K_f + U_{\text{grav},f} + U_{\text{el},f}$$

***Mostre!**

$$K_i + U_i + W_{\text{demais}} = K_f + U_f$$

onde U agora é a energia potencial total, ou seja:

$$\boxed{U := U_{\text{grav}} + U_{\text{el}}} \tag{10}$$

de modo que a equação anterior pode ser escrita mais compactamente como sendo:

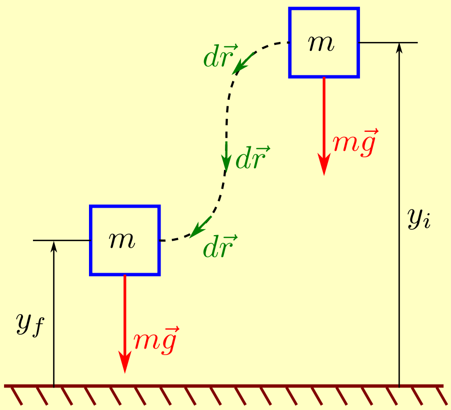
$$\boxed{W_{\text{demais}} = \Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = \Delta E} \tag{11}$$

Portanto, *a variação da energia mecânica de um sistema é resultante do trabalho de forças que são ditas não-conservativas.*

2 Forças Conservativas

Dizemos que uma força $\vec{F}$ é conservativa quanto o trabalho realizado por ela é independente do caminho realizado. Neste caso, ele depende apenas dos extremos (posições inicial e final) e representa a diferença de energia potencial entre eles.

Exemplo: Movimento sob a ação da gravidade



Imaginemos um corpo em movimento sobre um determinado caminho, conforme a figura. O trabalho da força peso é calculado por

$$W_{\text{grav}} = \int_i^f \vec{F}_{\text{peso}} \cdot d\vec{r}$$

onde $\vec{F}_{\text{peso}} = -mg\hat{y}$ e $d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$, de modo que

$$\vec{F}_{\text{peso}} \cdot d\vec{r} = (-mg\hat{y}) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) = -mgdy$$

Portanto, o trabalho da força peso pode ser calculado facilmente como

$$W_{\text{grav}} = -mg \int_{y_i}^{y_f} dy = -mg(y_f - y_i) = -\Delta U_{\text{grav}}$$

Assim, o trabalho da força peso independe do caminho percorrido, sendo ela uma força conservativa!

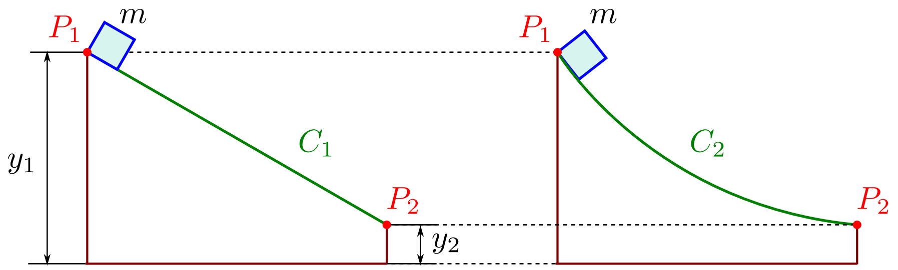
Então, como exemplo de forças conservativas temos a força peso, a força elástica e a força eletrostática.

Dessa forma, podemos definir a energia potencial de uma força conservativa como

$$\boxed{U(P) := -\int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{onde} \quad U(P_0) = 0} \tag{12}$$

de tal maneira que o ponto P_0 é escolhido como sendo o ponto no qual a energia potencial associada a força $\vec{F}$ é nula.

Vamos agora investigar o fato que para uma força conservativa o trabalho independe do caminho realizado. Para isso, vamos imaginar um bloco de massa m sobre a superfície de dois planos C_1 e C_2, conforme figura.

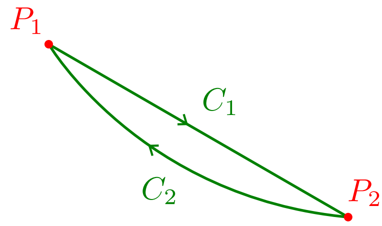


Então, considerando uma força conservativa (como a força peso), podemos dizer que

$$\int_{\substack{P_1 \\ (C_1)}}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\substack{P_1 \\ (C_2)}}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta U \tag{13}$$

e lembrando que $\int_a^b = -\int_b^a$, podemos dizer que

$$\int_{\substack{P_1 \\ (C_1)}}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\substack{P_2 \\ (C_2)}}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



que equivale a percorrer o caminho fechado $(C) = (C_1) \cup (C_2)$, de modo que podemos escrever essa integral numa forma mais compacta, usando o conceito de integral fechada, como

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0} \tag{14}$$

Assim, uma **força conservativa** deve respeitar essa relação acima, ou seja, o trabalho de uma força conservativa num circuito fechado é nulo!

3 Forças Não-Conservativas

O trabalho de uma força não-conservativa depende do caminho percorrido. De modo que, para esse tipo de força, podemos dizer que o trabalho realizado num circuito fechado é não-nulo, de fato

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0} \tag{15}$$

Como exemplo de forças não-conservativas temos a força de atrito e a força de resitência do ar.

4 Conservação da Energia Mecânica

Vamos considerar o caso de um sistema (ou corpo) sujeito à ação de diversas forças, então sabemos que podemos escrever

$$W_{\text{total}} = \sum_i W_i^{(\text{C})} + \sum_i W_i^{(\text{NC})} = \Delta K$$

ou seja, separamos os trabalhos das forças conservativas e das forças não-conservativas. Essa separação é útil uma vez que podemos escrever

$$W_i^{(\text{C})} = -\Delta U_i$$

e ainda, escrevemos a energia potencial total associada às forças conservativas como $U = \sum_i U_i$, e então

$$\sum_i W_i^{(\text{NC})} = \Delta K + \Delta U = \Delta(K + U)$$

***Mostre!**

que é facilmente indentificada como

$$\boxed{\sum_i W_i^{(\text{NC})} = \Delta E_M \quad \text{onde} \quad E_M = K + U} \tag{16}$$

Logo, **a variação da energia mecânica é igual ao trabalho das forças não-conservatvas**.

5 Força como Gradiente da Energia Potencial

Vamos lembrar que a energia potencial é uma função da posição dada por

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx \tag{17}$$

e usando o teorema fundamental do cálculo [1] , podemos "inverter"a integral usando

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \tag{18}$$

que no caso tridimensional passa a ser uma gradiente

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z} \tag{19}$$

[1] O teorema fundamental do cálculo diz que $F(x) = \int f(x')dx'$ quando $f(x) = dF/dx$.

Exemplo: Força Elástica

No caso da força elástica temos como energia potencial elástica $U(x) = kx^2/2$, então

$$F(x) = -\frac{d(kx^2/2)}{dx} = -kx$$

Exemplo: Força Peso

No caso da força peso temos como energia potencial gravitacional $U(y) = mgy$, então

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(mgy) = -\frac{\partial(mgy)}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial(mgy)}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial(mgy)}{\partial z}\hat{z} = -mg\hat{y}$$

6 Discussão Qualitativa do Movimento sob à Ação de Forças Conservativas

Vamos analisar a relação entre a energia potencial e a força, à ela associada, graficamente.

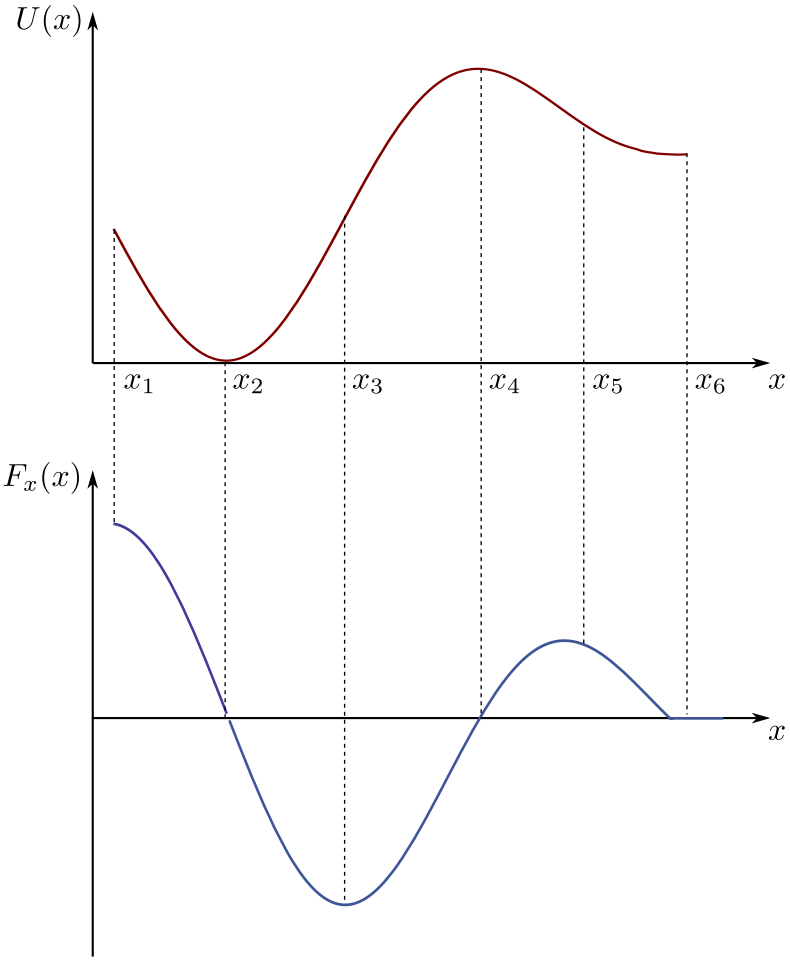


Figura 1: Um exemplo de gráfico da energia potencial e da força, que é dada pela derivada desse potencial $F_x = -dU/dx$.

6.1 Sentido da Força

Para determinar o sentido da força $\vec{F} = F_x\hat{x}$, podemos utilizar a relação entre essa componente F_x e o potencial U, dada por

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \tag{20}$$

Como exemplo, na posição x_3 o sentido da força $\vec{F}$ é negativo, enquanto que na posição x_5 o sentido é positivo.

6.2 Posições de Equilíbrio

As posições de equilíbrio são aquelas nas quais a força associado ao potencial é nula, ou seja, devemos ter

$$F(x_{\text{eq}}) = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_{\text{eq}}} = 0 \tag{21}$$

Podemos classificar as posições de equilíbrio quanto ao tipo de equilíbrio presente

- **estável**: na posição x_2 o equilíbrio é estável, uma vez que, a força na vizinhança desse ponto é restauradora, sempre fazendo com que a partícula volte a posição original x_2 (associada a um mínimo de energia potencial).
- **instável**: na posição x_4 o equilíbrio é instável, uma vez que, a força na vizinhança desse ponto faz sempre com que a partícula se afaste da posição original x_4 (associada a um máximo de energia potencial).
- **indiferente**: na posição x_6 o equilíbrio é dito indiferente, uma vez que, a força na vizinhança desse ponto é nula (associada a um platô de energia potencial).

6.3 Trabalho realizado

Para determinarmos o trabalho realizado por essa força associada a essa energia potencial, podemos utilizar a relação

$$W = -\Delta U \tag{22}$$

Como exemplo, no delocamento da partícula de x_1 para x_2 o trabalho realizado $W_{1\to 2}$ pela força é positivo, enquanto que no delocamento da partícula de x_3 para x_4 o trabalho realizado $W_{3\to 4}$ pela força é negativo.

6.4 Movimentos possíveis

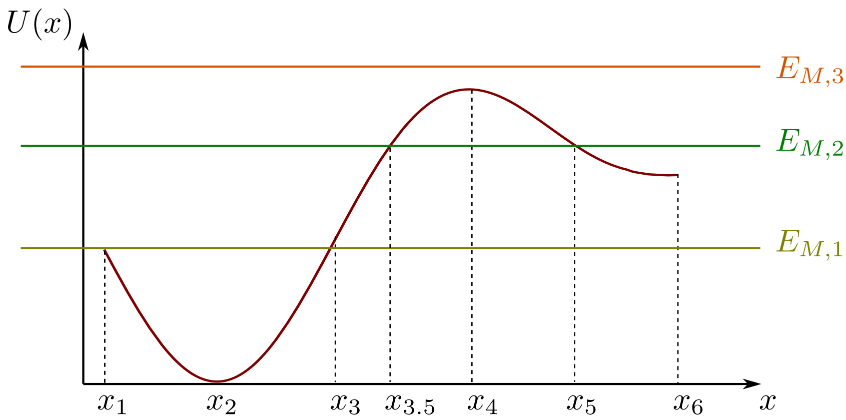
Para uma partícula com uma dada energia mecânica E_M, e com energia potencial dada por $U(x)$, a energia cinética pode ser obtida por

$$\frac{mv^2}{2} = E_M - U(x) \geq 0 \tag{23}$$

A última condição vem do fato que a energia cinética é sempre positiva, de modo que, para que a partícula se mova numa região sujeita a esse potencial, devemos ter sempre

$$E_M \geq U(x) \tag{24}$$

Vamos voltar ao nosso gráfico exemplo:



- quando a partícula tem energia mecânica $E_{M,1}$, ela só pode se mover entre as posições x_1 e x_3, pois para $x > x_3$ a energia cinetica desta partícula seria negativa, e chamamos essa região de região proibida classicamente.
- quando a partícula tem energia mecânica $E_{M,2}$, ela só pode se mover para as posições $x \leq x_{3.5}$ e também para $x \geq x_5$, de modo que a região proibida classicamente é $x_{3.5} < x < x_5$.
- quando a partícula tem energia mecânica $E_{M,3}$, ela só pode se mover em todas as posições desde x_1 até x_6, de modo que não há região proibida classicamente para essa energia.