Universidade Federal do Rio de Janeiro — Instituto de Física

Física I — IGM1 — 2014/1

Cap. 5 - Trabalho e Energia Cinética

Prof. Elvis Soares

Sabemos que a Segunda Lei de Newton determina a aceleração $\vec{a}$ da partícula a partir da força resultante $\vec{F}_R$ e, dessa forma, relaciona-se com a sua posição, sua velocidade e o dado instante tempo.

$$m\vec{a} = \vec{F}_R = f(\vec{r}, \vec{v}, t) \tag{1}$$

Assim, o principal problema da Dinâmica é determinar os movimentos possíveis da partícula sob a ação de uma dada força $\vec{F}$.

De fato, para resolver esse problema, devemos utilizar técnicas de resolução de eqs. diferenciais de 2a ordem, uma vez que:

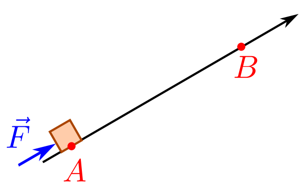
$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

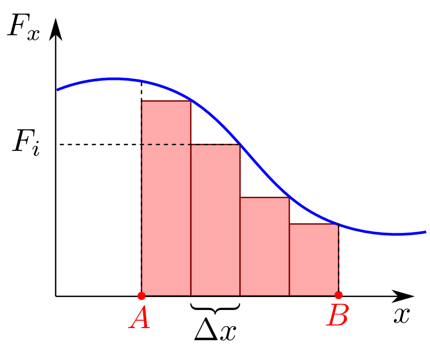
Será então que há outra maneira de obter uma relação entre a posição da partícula e sua velocidade?

1 Caso Unidimensional

Sabemos que certos movimentos são difíceis de serem executados, mesmo que apliquemos a mesma força durante todo o deslocamento. A dificuldade muita das vezes vem da distância considerada para o deslocamento.

Assim, o trabalho associado a uma força qualquer para deslocar o corpo de A até B, denotado por $W_{A\to B}$, pode ser definido como a área sob a curva da força em função da posição, como mostra a figura abaixo.

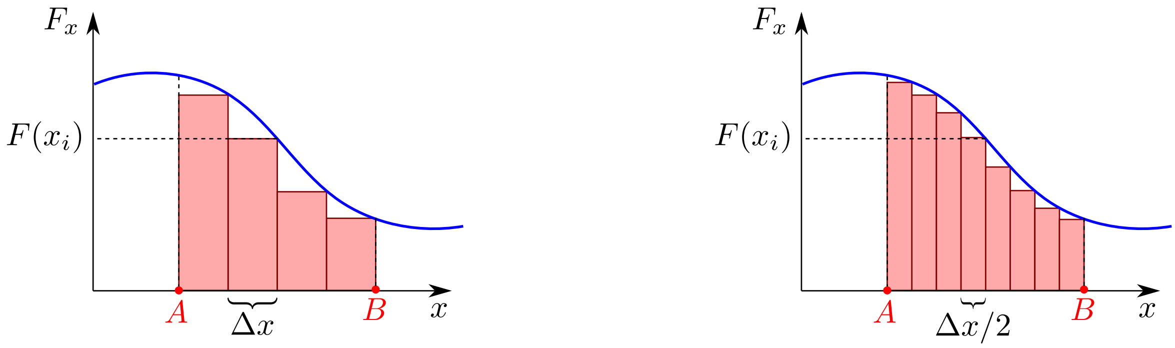




Podemos calcular a área sob a curva usando uma aproximação grosseira de retângulos, de modo que

$$W_{A\to B} \approx \sum_A^B W_i = \sum_A^B F(x_i)\Delta x$$

Notemos que ao aumentarmos o número de retângulos usados, ou seja, ao diminuirmos Δx, conseguimos uma melhor aproximação da área sob o gráfico, como mostra a figura abaixo.



De fato, no limite em que $\Delta x \to 0$ teremos uma aproximação perfeita da área sob a curva, ou seja, do trabalho realizado pela força.

$$W_{A\to B} \equiv \lim_{\Delta x\to 0} \sum_A^B F(x_i)\Delta x$$

Essa aproximação é conhecida matematicamente como a integral de Riemann, que é definida como segue

$$\boxed{W_{A\to B} := \int_A^B F(x)dx} \tag{2}$$

Exemplo: Força Constante

Para uma força constante durante o deslocamento, podemos escrever

$$W_{A\to B} = F\int_A^B dx = F(x_B - x_A) = F\Delta x$$

Lembrando ainda da Segunda Lei de Newton, que nos diz que $F_R = ma = m\frac{dv}{dt}$, podemos calcular o trabalho da força resultante da seguinte forma

$$W_{A\to B}^R = \int_A^B m\frac{dv}{dt}dx = \int_A^B m\frac{dx}{dt}dv = \int_{v_A}^{v_B} mvdv$$

onde usamos o fato que $v = \frac{dx}{dt}$, no caso unidimensional, e facilmente integramos obtendo

$$W_{A\to B}^R = \frac{mv_B}{2} - \frac{mv_A}{2}$$

Podemos então definir uma nova grandeza que determina o trabalho realizado no corpo através apenas de suas velocidades inicial e final.

$$K = \frac{mv^2}{2} \tag{3}$$

de modo que a relação anterior é re-escrita compactamente na forma

$$W^R_{A\to B} = K_B - K_A = \Delta K \tag{4}$$

2 Trabalho

No caso mais geral, a força é um vetor tridimensional que pode ser escrito como $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$, enquanto o deslocamento infinitesimal realizado será dado por $d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$.

O trabalho total associado a essa força durante um deslocamento do corpo de um ponto $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ a um ponto $P_f = (x_f, y_f, z_f)$ pode ser calculado da melhor maneira usando o fato que o trabalho é aditivo, então

$$W_{if} = \underbrace{\int_{x_i}^{x_f} F_x dx}_{W_x} + \underbrace{\int_{y_i}^{y_f} F_y dy}_{W_y} + \underbrace{\int_{z_i}^{z_f} F_z dz}_{W_z}$$

que podemos representar simplesmente como um produto escalar, dito $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, e assim escrevemos o trabalho na forma mais geral possível como

$$\boxed{W_{if} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}} \tag{5}$$

3 Energia Cinética