Universidade Federal do Rio de Janeiro — Instituto de Física

Física I — IGM1 — 2014/1

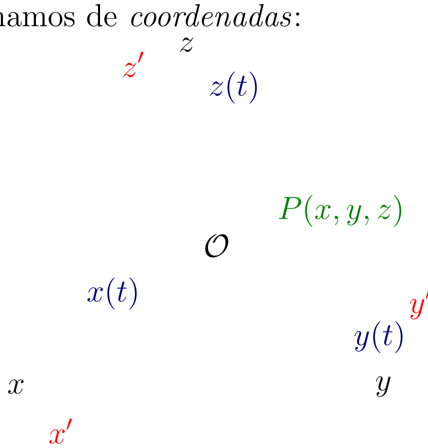
Cap. 1 - Vetores

Prof. Elvis Soares

Vetores são descrições matemáticas de quantidades que possuem intensidade, direção e sentido. A intensidade de um vetor ou também chamado de módulo é um número não-negativo, às vezes acompanhado de sua unidade física.

1 Descrição em Termos de Coordenadas

Podemos especificar a posição de um ponto no espaço tridimensional através de 3 números que chamamos de *coordenadas*:



$$P = (x(t), y(t), z(t)) \tag{1}$$

O sistema de coordenadas é um acessório e, de fato, o mesmo movimento pode ser descrito com eixos de orientação diferentes.

$$P = (x'(t), y'(t), z'(t)) \tag{2}$$

Podemos descrever o movimento intrinsicamente através de **vetores**, pois para caracterizar o movimento de uma partícula em sua trajetória, precisamos conhecer a **magnitude** (distância à origem), bem como a **direção** e **sentido** do deslocamento.

`trajetoria1-eps-converted-to.pdf` `trajetoria2-eps-converted-to.pdf`

2 Vetores

"A formulação de uma lei física em termos de vetores é independente da escolha dos eixos coordenados."

Seja um vetor $\vec{A}$. O vetor que tem a mesma direção e o mesmo módulo que $\vec{A}$, porém sentido oposto, é chamado de **vetor oposto**.

desenho2-eps-converted-to.pdf

$\vec{A}$ $-\vec{A}$

O módulo do vetor $\vec{A}$ é a sua magnitude e denotado por

desenho3-eps-converted-to.pdf

$$A = |\vec{A}| \tag{3}$$

3 Adição de Vetores

Dados dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Tomemos a origem de $\vec{B}$ na extremidade de $\vec{A}$:

$\vec{B}$ $\vec{A}$ $\vec{B}$ $\vec{A}$

Definimos a soma $\vec{A} + \vec{B}$ como sendo o vetor representado pela seta que une a origem do vetor $\vec{A}$ com a extremidade do vetor $\vec{B}$.

$\vec{A} + \vec{B}$ $\vec{B}$ $\vec{A}$

Algumas propriedades:

1. comutatividade

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

comutatividade-eps-converted-to.pdf

2. associatividade

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

associatividade-eps-converted-to.pdf

3. vetor nulo

$$\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$$

nulo-eps-converted-to.pdf

4. vetor oposto

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$$

oposto-eps-converted-to.pdf

Além disso

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

subtracao-eps-converted-to.pdf

4 Multiplicação de um Escalar por Vetores

Seja λ um número real e $\vec{A}$ um vetor. Podemos associar um novo vetor, simbolizado por $\lambda\vec{A}$, que:

- Se $\lambda = 0$ ou $\vec{A} = 0$, temos $\lambda\vec{A}$ como sendo o vetor nulo.
- Nos outros casos, $\lambda\vec{A}$ é o vetor com a mesma direção de $\vec{A}$, com módulo igual a $|\lambda\vec{A}| = |\lambda||\vec{A}|$, e com o mesmo sentido de $\vec{A}$ se $\lambda > 0$, mas sentido oposto se $\lambda < 0$.

Para quaisquer λ e $\mu \in \mathbb{R}$, e quaisquer vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, temos:

$$\lambda(\mu\vec{A}) = (\lambda\mu)\vec{A}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{A} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{A}$$

escalar-eps-converted-to.pdf

$$\lambda(\vec{A}+\vec{B}) = \lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$$

Além disso, se o vetor $\vec{A}$ é diferente de nulo, seu módulo $|\vec{A}|$ tem um inverso $\dfrac{1}{|\vec{A}|}$. E multiplicando-se o vetor $\vec{A}$ por esse número, tem-se um vetor unitário:

$$\hat{A} \equiv \frac{1}{|\vec{A}|}\vec{A} \tag{4}$$

onde um vetor unitário é um vetor cujo módulo é igual a 1, ou seja, $|\vec{u}| = 1$.

5 Componentes de um Vetores

Consideremos um sistema de coordenadas cartesiano e vetores unitários ao longo da direção de cada eixo independentemente, denominados $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, conforme a figura.

unitario-eps-converted-to.pdf

$$\begin{cases} \hat{x} = (1,0,0) \\ \hat{y} = (0,1,0) \\ \hat{z} = (0,0,1) \end{cases}$$

Podemos escrever um vetor $\vec{A}$ usando unitários na forma

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A_x, A_y, A_z) \\ &= (A_x,0,0)+(0,A_y,0)+(0,0,A_z) \\ &= A_x(1,0,0)+,A_y(0,1,0)+A_z(0,0,1) \\ &= A_x\hat{x}+,A_y\hat{y}+A_z\hat{z} \end{aligned}$$

Vamos demonstrar então que qualquer vetor pode ser escrito em termos de $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, como descrito acima.

componentes-eps-converted-to.pdf

Por construção, sabemos que:

$$\vec{A} = \vec{A}_{xy} + \vec{A}_z \quad \text{e} \quad \vec{A}_{xy} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

E assim, podemos escrever claramente

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

E de fato, existem números A_x, A_y e A_z, tal que

$$\vec{A}_x = A_x\hat{x} \quad , \quad \vec{A}_y = A_y\hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{A}_z = A_z\hat{z}$$

De tal forma que nosso vetor $\vec{A}$ pode ser escrito como

$$\boxed{\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}} \tag{5}$$

Algumas propriedades desse resultado são apresentadas a seguir.

1. *Um vetor é nulo se, e somente se, suas componentes são iguais a zero.*

$$A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad A_x = 0,\ A_y = 0 \text{ e } A_z = 0$$

2. *Dois vetores são iguais se, e somente se, suas respectivas componentes forem iguais.*

$$A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

do que obtemos

$$(A_x - B_x)\hat{x} + (A_y - B_y)\hat{y} + (A_z - B_z)\hat{z} = \vec{0}$$

e da propriedade (1), obtemos $A_x - B_x = A_y - B_y = A_z - B_z = 0$, e então

$$\vec{A} = \vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad A_x = B_x,\ A_y = B_y \text{ e } A_z = B_z$$

3. *Cada componente da soma de dois vetores é igual a soma das respectivas componentes dos vetores.*

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} \quad \Leftrightarrow \quad A_x = B_x + C_x,\ A_y = B_y + C_y \text{ e } A_z = B_z + C_z$$

***Mostre!**

4. *Cada componente do produto de um escalar por um vetor é igual ao produto do escalar pela respectiva componente do vetor.*

$$\vec{A} = \lambda\vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad A_x = \lambda B_x,\ A_y = \lambda B_y \text{ e } A_z = \lambda B_z$$

***Mostre!**

Todos os infinitos vetores do espaço tridimensional podem ser escritos a partir dos vetores unitários de base $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$.

6 Produtos entre Vetores

6.1 Produto Escalar

O produto escalar entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é definido como um número que é obtido pelo módulo de $\vec{A}$ vezes o módulo de $\vec{B}$ vezes o cosseno do ângulo entre eles, conforme figura. *Assim, o produto escalar resulta em um escalar.*

produto_escalar-eps-converted-to.pdf

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB\cos\theta} \tag{6}$$

Vemos que nenhum sistema de coordenadas está envolvido na definição do produto escalar. Algumas propriedades do produto escalar são mostradas a seguir.

1. *comutatividade:*
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

2. *módulo de um vetor:*
$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 \cos 0 = A^2 = |\vec{A}|$$

3. *ortogonalidade:*
$$\vec{A} \perp \vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

   ***Mostre!**

Seja um vetor $\vec{A}$ e um vetor $\vec{B}$ escritos em termos de componentes cartesianas, o produto escalar entre esses dois vetores pode ser escrito como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \cdot (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$$

e como $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$ e $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$, então podemos escrever

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} \tag{7}$$

Que demonstra que em termos de componentes, o módulo de um vetor qualquer $\vec{A}$ pode ser obtido através de

$$\boxed{A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_xA_x + A_yA_y + A_zB_z}} \tag{8}$$

Lei dos cossenos:
Seja $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$, e tomando o produto escalar de cada cada lado dessa expressão, teremos:

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})$$

ou

lei_cossenos-eps-converted-to.pdf

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B}$$

que é exatamente a relação trigonométrica famosa

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

6.2 Produto Vetorial

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ resulta em um novo vetor que é perpendicular ao plano que inclui ambos os vetores, e com magnitude dada por $AB|\operatorname{sen}\theta|$.

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \hat{C} AB \operatorname{sen}\theta} \tag{9}$$

produto_vetorial-eps-converted-to.pdf

onde o sentido de $\hat{C}$ é determinado por convenção pela *regra da mão-direita*. Além disso, algumas propriedades do produto vetorial decorrem dessa convenção.

1. *não-comutatividade:*
$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$$
2. *vetor nulo:*
$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$$
3. *distributiva:*
$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ escritos em termos de componentes é calculado a partir de

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \times (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) \\
&= (\hat{x} \times \hat{y})A_xB_y + (\hat{x} \times \hat{z})A_xB_z + (\hat{y} \times \hat{x})A_yB_x \\
&\quad +(\hat{y} \times \hat{z})A_yB_z + (\hat{z} \times \hat{x})A_zB_x + (\hat{z} \times \hat{y})A_zB_y
\end{aligned}$$

sistema-eps-converted-to.pdf

onde usamos que $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$, e da regra da mão-direita sobre o sistema de coordenadas podemos notar que $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$ e $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$. Note essa relação a partir do sistema de coordenadas acima.

Vemos então que o produto vetorial pode ser escrito na seguinte forma em termos de componentes.

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{z}} \tag{10}$$

Caso esteja mais familiarizado com determinantes, pode-se obter o produto vetorial a partir da representação.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{11}$$

Lei dos senos:

Consideremos o triângulo definido por $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, e tomando o produto vetorial de cada cada lado dessa expressão por $\vec{A}$, teremos:

$$\vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{B}$$

lei_senos-eps-converted-to.p

e como $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, e os módulos de ambos os lados devem ser iguais tal que:

$$AC \operatorname{sen} \gamma = AB \operatorname{sen} \beta$$

que é exatamente a relação trigonométrica conhecida como lei dos senos.

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} \beta}{B} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{C}}$$