Capítulo 8

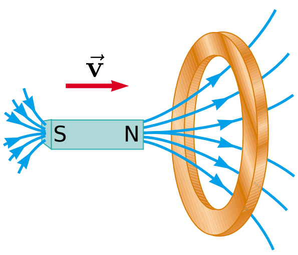
Indução Eletromagnética

Nesse capítulo, estudaremos como um campo magnético variável pode induzir uma f.e.m num circuito, o grandioso fenômeno da indução eletromagnética, determinar a indutância de alguns circuitos, calcular a energia armazenada no campo magnética e obter enfim as famosas equações de Maxwell.

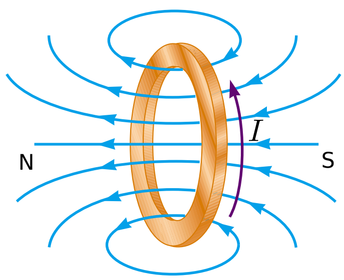
8.1 Lei de Lenz

Experimentos conduzidos por Michael Faraday na Inglaterra em 1831 e independentemente por Joseph Henry nos EUA no mesmo ano mostraram que uma f.e.m (força eletromotriz) pode ser induzida num circuito pela variação do campo magnético.

Primeiramente, vamos analisar qualitativamente o sentido da corrente induzida numa espira devido a variação do fluxo magnético que atravessa a mesma, para isso consideremos a situação em que um imã se move em direção a uma espira condutora, conforme figura.

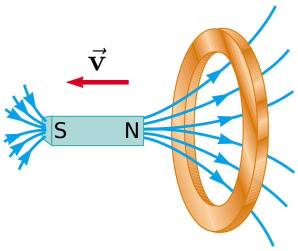


(a)

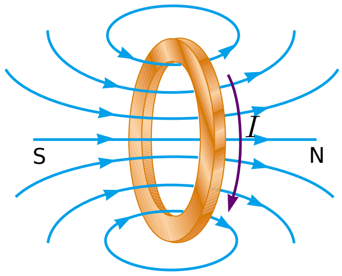


(b)

Quando o imã se aproxima da espira, conforme figura (a), o fluxo magnético externo através da espira aumenta com o tempo. Para contrabalancear esse aumento de fluxo devido ao campo dirigido para a direita, a corrente induzida produz seu próprio campo para a esquerda, conforme figura (b), e assim, a corrente induzida está na direção indicada. Sabendo que pólos iguais se repelem, concluímos que a face esquerda da espira age como um pólo norte e a face direita como um pólo sul.



(c)



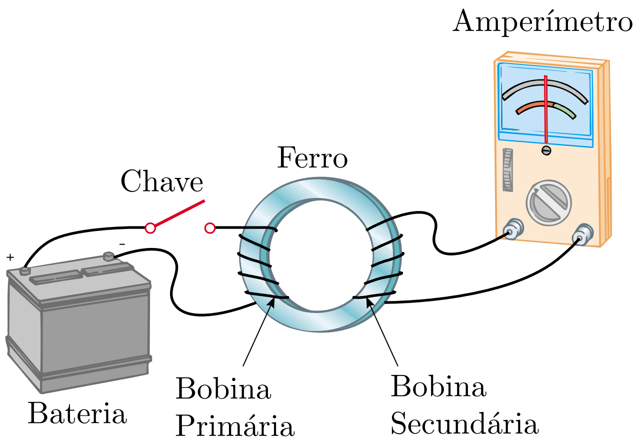
(d)

Se o imã se move para a esquerda, conforme figura (c), seu fluxo através da área delimitada pela espira diminui com o tempo. Agora a corrente induzida na espira está na direção mostrada na figura (d) pois sua corrente produz um campo magnético na mesma direção do campo externo. Nesse caso, a face esquerda da espira é um pólo sul e a face direita é um pólo norte.

Essa interpretação física é conhecida como **lei de Lenz** e afirma que a corrente induzida numa espira está na direção que cria um campo magnético que se opõe a mudança do fluxo magnético através da área delimitada pela espira.

8.2 Indução de Faraday

Vamos agora descrever um experimento conduzido por Faraday e ilustrado na figura a seguir. Uma bobina primária está conectada a uma chave e a uma bateria, estando enrolada num anel de ferro, de tal forma que uma corrente na bobina produz um campo magnético no metal quando a chave é fechada. Uma bobina secundária está também enrolada no anel metálico e está conectada a um amperímetro, onde nenhuma bateria está conectada a ela, e nem mesmo está conectada à bobina primária. Qualquer corrente detectada no circuito secundário deve ser induzida por algum agente externo.



No instante que a chave é fechada, o amperímetro marca uma corrente numa certa direção e então retorna ao zero. No instante em que a chave é aberta, o amperímetro marca a corrente numa direção oposta e retorna ao zero.

Finalmente, o amperímetro lê zero quando há ora uma corrente estacionária, ora nenhuma corrente no circuito primário. A idéia principal desse experimento é que quando a chave é fechada, a corrente no circuito primário produz um campo magnético que penetra o circuito secundário, e o mesmo ocorre no momento em que a chave é aberta, de modo que o sentido da corrente se opõe devido a lei de Lenz.

Como resultado dessas observações, Faraday concluiu que uma corrente elétrica pode ser induzida num circuito pela mudança do campo magnético. A corrente induzida existe somente num curto intervalo de tempo quando o campo magnético através da bobina secundária está mudando. E uma vez que o campo magnético se torna estacionário, a corrente na bobina secundária desaparece.

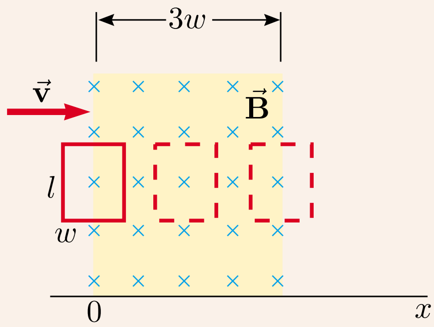
Em geral, a **lei de indução de Faraday** diz que a f.e.m induzida num circuito é diretamente proporcional a taxa temporal da variação do fluxo magnético através do circuito, e pode ser escrita como

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \tag{8.1}$$

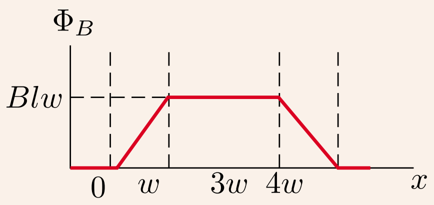
onde $\Phi_B = \int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$ é o fluxo magnético através do circuito.

Exemplo 8.1. Espira se movendo através de um Campo Magnético

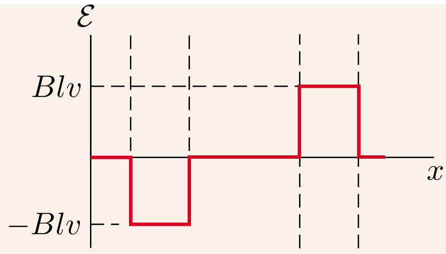
Uma espira condutora retangular de dimensões l e w se move com velocidade v constante para a direita, conforme a figura. A espira atravessa um campo magnético uniforme $\vec{\boldsymbol{B}}$ dirigido para dentro da página numa extensão de $3w$ ao longo do eixo x.



A figura (a) mostra o fluxo através da área delimitada pela espira como função de x. Antes da espira entrar na região do campo, o fluxo é zero. Conforme a espira entra no campo, o fluxo aumenta linearmente com a posição até a lateral esquerda da espira estar justamente dentro do campo. Finalmente, o fluxo através da espira decresce linearmente para zero conforme a espira deixa o campo.



(a)

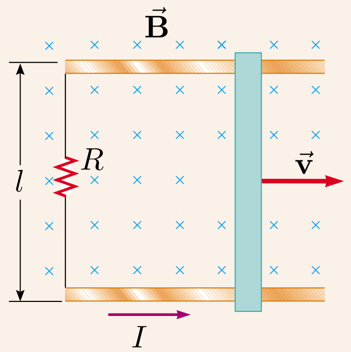


(b)

A figura (b) mostra a f.e.m induzida na espira como função de x. Antes da espira entrar na região do campo, nenhuma f.e.m é induzida na espira. Conforme a aresta direita da espira entra no campo, o fluxo magnético dirigido para dentro da página cresce, e de acordo com a lei de Lenz, a corrente induzida é anti-horária pois deve produzir um campo saindo da página, sendo a f.e.m induzida igual a $-Blv$. Quando a espira está inteiramente no campo, a variação do fluxo é zero, e assim a f.e.m é nula. Quando a aresta direita da espira deixa o campo, o fluxo diminui, uma corrente horária é induzida, e a f.e.m induzida é Blv. E enquanto a aresta esquerda deixa o campo, a f.e.m diminui para zero.

Exemplo 8.2. Freio Magnético

Uma barra condutora de comprimento l e massa m se move em cima de dois trilhos paralelos sem atrito na presença de um campo magnético uniforme dirigido para dentro da página, conforme a figura. No instante inicial, a velocidade da barra é v_0.



Usando a lei de Lenz, vemos que conforme a barra se movimenta para a direita, uma corrente no sentido anti-horário se estabelece no circuito consistindo da barra, os trilhos e um resistor R. O fluxo magnético que atravessa o circuito depende da posição da barra x, isto é $\Phi_B = -Blx$, com o sinal negativo vindo do fato que a área está orientada positivamente e o campo negativamente.

Desta forma, a variação do fluxo magnético neste mesmo circuito será

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

Usando a lei de Faraday podemos determinar a f.e.m induzida nesse circuito, uma vez que há variação do fluxo magnético, de modo que $\mathcal{E} = Blv$, e com a resistência do circuito sendo R, a corrente induzida será

$$I = \frac{Blv}{R}$$

Como a energia tem de ser conservada no sistema, a taxa de energia cinética transferida da barra é igual a taxa de energia transferia para o resistor. Então, $\mathcal{P}_{\text{resistor}} = -\mathcal{P}_{\text{barra}}$, que podemos escrever como

$$R\left(\frac{Blv}{R}\right)^2 = -mv\frac{dv}{dt}$$

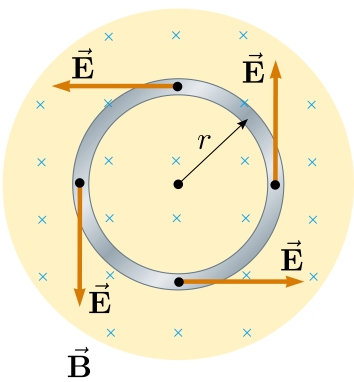
que resolvendo para v em função de t teremos como solução

$$\boxed{v(t) = v_0 e^{-t/\tau}}$$

onde τ é um tempo característico de decaimento da velocidade, dado por $(Bl)^2/mR$. Assim, devido o aumento do fluxo magnético, a corrente elétrica induzida faz com que a barra freie e cesse o aumento do fluxo magnético enfim.

8.3 Lei de Faraday

Vimos que uma mudança no fluxo magnético induz uma f.e.m e uma corrente numa espira condutora. Em nosso estudo de eletricidade, relacionamos a corrente a um campo elétrico que aplica uma força em partículas carregadas. Da mesma maneira, podemos relacionar uma corrente induzida numa espira condutora a um campo elétrico.



Podemos entender essa relação considerando uma espira condutora de raio r situada num campo magnético uniforme que é perpendicular ao plano da espira, conforme figura. Se o campo magnético varia no tempo, então, de acordo com a indução de Faraday, uma f.e.m $\mathcal{E} = -\,\mathrm{d}\Phi_B/\,\mathrm{d}t$ é induzida na espira. A indução de uma corrente numa espira implica a presença de um campo elétrico induzido $\vec{\boldsymbol{E}}$, que deve ser tangente à espira pois essa é a direção em que as cargas no fio se movem sob a ação da força elétrica.

A f.e.m induzida em qualquer curva fechada pode ser expressa como $\mathcal{E} = \oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$. Em casos mais gerais, E não deve ser constante, e o caminho pode não ser um círculo. Assim, a lei de Faraday da indução pode ser escrita na forma geral

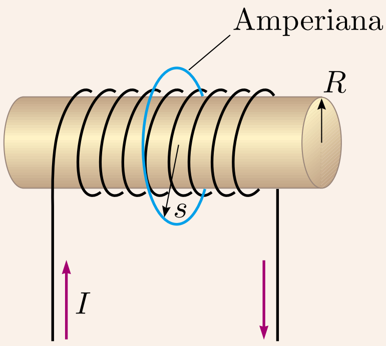
$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \tag{8.2}$$

O campo elétrico induzido $\vec{\boldsymbol{E}}$ pela lei de Faraday é um campo não-conservativo que é gerado pela variação do campo magnético. De fato, o campo elétrico induzido pela lei de

Faraday é não-conservativo, uma vez que a integral $\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \neq 0$.

Exemplo 8.3. Campo Elétrico gerado por um Solenóide Infinito

Consideremos um solenóide muito longo de raio R possuindo n espirar por unidade de comprimento que carrega uma corrente variável na forma $I = I_0 \cos \omega t$, onde I_0 é o valor máximo da corrente e ω é a frequência angular da corrente alternada.



Devido a simetria axial das linhas de campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ produzidas pelo solenóide, devemos usar a lei de Faraday com o auxílio de amperianas na forma circular. Por simetria, vemos que a intensidade E do campo elétrico é constante nessa amperiana e que $\vec{\boldsymbol{E}}$ é tangente a curva.

Usando coordenadas cilíndricas onde o eixo do solenóide é o eixo z, temos

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = E(s)\hat{\boldsymbol{\phi}}}$$

Para a região externa ao solenóide, utilizaremos uma amperiana de raio $s > R$ por onde passa um fluxo magnético igual a $BA = B\pi R^2$, e assim

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = 2\pi s E(s) = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

e como o campo magnético no interior do solenóide é $B = \mu_0 n I$, podemos substituir a corrente $I = I_0 \cos \omega t$ nessa relação e então substituir na equação acima como

$$2\pi s E(s) = -\pi R^2 \mu_0 n I_0 \frac{d}{dt}(\cos \omega t)$$

então

$$\boxed{E(s > R) = \frac{\mu_0 n I_0 \omega R^2}{2s} \operatorname{sen} \omega t}$$

Para a região interna ao solenóide, utilizaremos uma amperiana de raio $s < R$ por onde passa um fluxo magnético igual a $BA = B\pi s^2$, e assim

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = 2\pi s E(s) = -\pi s^2 \frac{dB}{dt} = \pi s^2 \mu_0 n I_0 \omega \operatorname{sen} \omega t$$

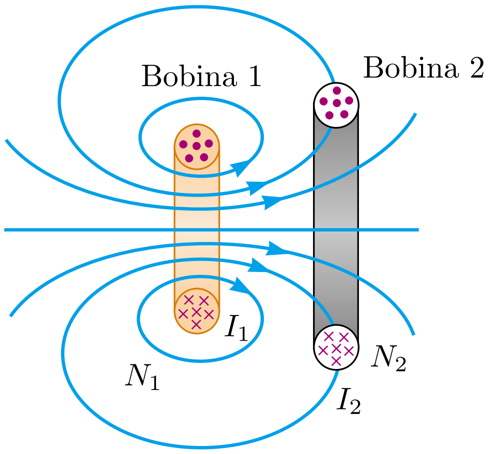
então

$$\boxed{E(s < R) = \frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} s \operatorname{sen} \omega t}$$

Isso mostra que a intensidade do campo elétrico induzido varia de forma senoidal devido à variação da corrente elétrica no solenóide. Assim, **o campo elétrico induzido depende da variação do campo magnético.**

8.4 Indutância Mútua e Auto-Indutância

Sabemos que entre dois fios que conduzem correntes elétricas **estacionárias** existe uma interação magnética, pois a corrente de um fio produz um campo magnético sobre a corrente do outro fio. Porém, quando existe uma corrente **variável** em dos circuitos, ocorre uma interação a mais!



Consideremos duas bobinas com número de espiras N_1 e N_2, conforme figura ao lado. Pela bobina 1 passa uma corrente I_1 que produz um campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}_1$ e, portanto, um fluxo magnético através da bobina 2, denominado Φ_2. Quando a corrente I_1 varia, o fluxo Φ_2 também varia, e de acordo com a lei de Faraday, isso produz uma f.e.m $\mathcal{E}_2$ na bobina 2, dada por

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}$$

Além disso, podemos representar a proporcionalidade entre o fluxo total $N_2\Phi_2$ através da bobina 2 e a corrente I_1 da bobina 1 na forma

$$N_2\Phi_2 = \mathcal{M}_{12} I_1$$

onde $\mathcal{M}_{12}$ é chamada **indutância mútua** das duas bobinas. Portanto,

$$N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = \mathcal{M}_{12} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

e podemos escrever

$$\mathcal{E}_2 = -\mathcal{M}_{12} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}, \tag{8.3}$$

ou seja, a variação da corrente I_1 na bobina 1 induz uma f.e.m $\mathcal{E}_2$ na bobina 2.

Podemos repetir o raciocínio anterior para o caso oposto, no qual uma corrente variável I_2 na bobina 2 produza um fluxo magnético variável Φ_1 e induza uma f.e.m $\mathcal{E}_1$ na bobina 1. E com isso, verificamos que $\mathcal{M}_{12}$ é sempre igual a $\mathcal{M}_{21}$, de modo que podemos representar a indutância mútua simplesmente pela letra $\mathcal{M}$. Logo, podemos escrever para as f.e.m's induzidas

$$\mathcal{E}_2 = -\mathcal{M}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_1 = -\mathcal{M}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{8.4}$$

e que a indutância mútua é

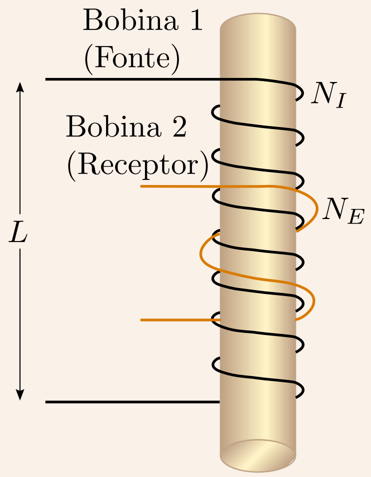
$$\mathcal{M} = \frac{N_2\Phi_2}{I_1} = \frac{N_1\Phi_1}{I_2} \tag{8.5}$$

A primeira equação afirma que a variação da corrente na bobina 1 produz uma variação do fluxo magnético na bobina 2, induzindo uma fem na bobina 2 que se opõe à variação desse fluxo, e na segunda equação as bobinas são invertidas.

A unidade no SI de indutância denomina-se **henry** (H), sendo igual a um weber por ampère, 1 H = 1 Wb/A.

Exemplo 8.4. Indutância Mútua de Solenóides

Consideremos um solenóide (fonte) de comprimento L com N_I espiras, carregando uma corrente I, e tendo área da seção transversal A. À sua volta se encontra outro solenóide (receptor) com N_E espiras, conforme figura.



O solenóide interno carrega uma corrente I, de modo que o campo magnético em seu interior tem intensidade

$$B = \frac{\mu_0 N_I I}{L}.$$

Como o fluxo do campo magnético $\Phi_{B(E)}$ através do solenóide externo é BA, a indutância mútua é

$$\mathcal{M} = \frac{N_E\Phi_{B(E)}}{I} = \frac{N_E BA}{I}$$

e usando o valor do campo magnético

$$\boxed{\mathcal{M} = \mu_0\frac{N_E N_I A}{L}}$$

Um efeito análogo ocorre até mesmo quando consideramos uma **única** bobina isolada. Quando existe uma corrente em um circuito, ela produz um campo magnético que gera um fluxo através do próprio circuito, e quando a corrente varia, esse fluxo também varia. Portanto, qualquer circuito percorrido por uma corrente variável possui uma f.e.m induzida nele mesmo pela variação do **seu próprio** fluxo magnético, que de acordo com a lei de Lenz, sempre se opõe à variação da corrente que produz a f.e.m e, portanto, tende a tornar mais difícil qualquer variação da corrente.

Uma f.e.m auto-induzida pode ocorrer em qualquer circuito, porém o efeito é ampliado quando o circuito contém uma bobina de N espiras. Por analogia à indutância mútua, definimos a **auto-indutância** $\mathcal{L}$ do circuito na forma

$$\mathcal{L} = \frac{N\Phi_B}{I} \tag{8.6}$$

E de acordo com a lei de Faraday para uma bobina com N espiras, a f.e.m auto-induzida pode ser escrita em termos da auto-indutância como

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L}\frac{dI}{dt} \tag{8.7}$$

E o sinal negativo novamente mostra que a fem auto-induzida em um circuito se opõe a qualquer variação da corrente que ocorra no circuito.

Exemplo 8.5. Auto-indutância de um Solenóide

Consideremos novamente um solenóide de comprimento L com N espiras cuja área da seção transversal A. Sabemos que o campo magnético produzido no interior do solenóide devido a uma corrente I é

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

onde $n = N/L$ é o número de voltas por unidade de comprimento. O fluxo magnético através de cada espira é

$$\Phi_B = BA = \mu_0 \frac{NA}{L} I$$

Usando a definição da auto-indutância, encontramos que

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{L}}$$

Assim, **a auto-indutância de um solenóide só depende da geometria e é proporcional ao quadrado do número de espiras no solenóide.**

8.5 Energia Magnética

Digamos que U seja a energia armazenada num indutor em algum instante de tempo, então a taxa dU/dt na qual a energia está sendo armazenada é

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mathcal{E}I = \mathcal{L}I\frac{dI}{dt}$$

Para determinar a energia total armazenada no indutor, podemos re-escrever essa expressão e integrar

$$U = \int_0^t \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^I \mathcal{L}I'\,dI' = \mathcal{L}\int_0^I I'\,dI'$$

$$U = \frac{1}{2}\mathcal{L}I^2 \tag{8.8}$$

E essa expressão representa a energia armazenada no campo magnético do indutor quando a corrente é I. Note que essa equação é similar aquela da energia armazenada no campo elétrico de um capacitor, $U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$. No outro caso, vimos que aquela energia é necessária para estabelecer o campo elétrico.

Podemos também determinar a densidade de energia de um campo magnético. Por simplicidade, consideremos um solenóide cuja indutância é dada por

$$\mathcal{L} = \mu_0 n^2 A l$$

O campo magnético do solenóide é dado por

$$B = \mu_0 n I$$

Substituindo a expressão para $\mathcal{L}$ e $I = B/\mu_0 n$, temos

$$U = \frac{1}{2}\mathcal{L}I^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 AL\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}AL$$

e como AL é o volume do solenóide, a densidade de energia magnética, ou a energia armazenada no campo magnético por unidade de volume do indutor é

$$u_B = \frac{U}{AL} = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{8.9}$$

Embora essa expressão foi derivada para o caso especial de um solenóide, é válida para qualquer região do espaço em que existe um campo magnético. Note que essa energia é similar a forma da energia por unidade de volume armazenada num campo elétrico, $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. Em ambos os casos, a densidade de energia é proporcional ao quadrado do campo.

8.6 Equações de Maxwell e Além!

Concluímos esse capítulo apresentando as quatro equações que são tratadas como as bases de todos fenômenos elétricos e magnéticos. Essas equações, desenvolvidas por James Clerk Maxwell, são tão fundamentais para os fenômenos eletromagnéticos como as leis de Newton são para os fenômenos mecânicos. De fato, a teoria de Maxwell foi mais longe do que ele próprio poderia imaginar pois concorda ainda mesmo com a teoria da relatividade especial, conforme Einstein mostrou em 1905.

As quatro **equações de Maxwell** são

$$\oint_{\partial V} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{8.10}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = 0 \tag{8.11}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \tag{8.12}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I + \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \tag{8.13}$$

e junto da equação para a **força de Lorentz**

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}} + q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \tag{8.14}$$

contém toda a informação sobre os fenômenos eletromagnéticos!