

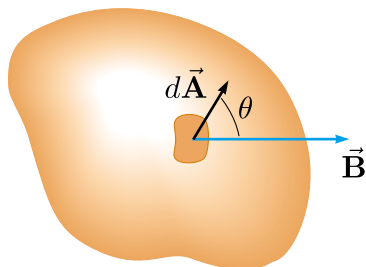
Capítulo 7

Fontes de Campo Magnético

Nesse capítulo, exploraremos a origem do campo magnético - cargas em movimento. Apresentaremos a Lei de Gauss do Magnetismo, a Lei de Biot-Savart, a Lei de Ampère e a corrente de deslocamento de Maxwell.

7.1 Lei de Gauss no Magnetismo

O fluxo associado com um campo magnético é definido numa maneira similar aquela usada para definir o fluxo elétrico.



Se em algum elemento de superfície dA , o campo magnético é \vec{B} , o fluxo magnético através desse elemento é $\vec{B} \cdot d\vec{A}$, onde $d\vec{A}$ é um vetor que é perpendicular a superfície e tem intensidade igual a área dA . Portanto, o fluxo magnético total Φ_B sobre a superfície é

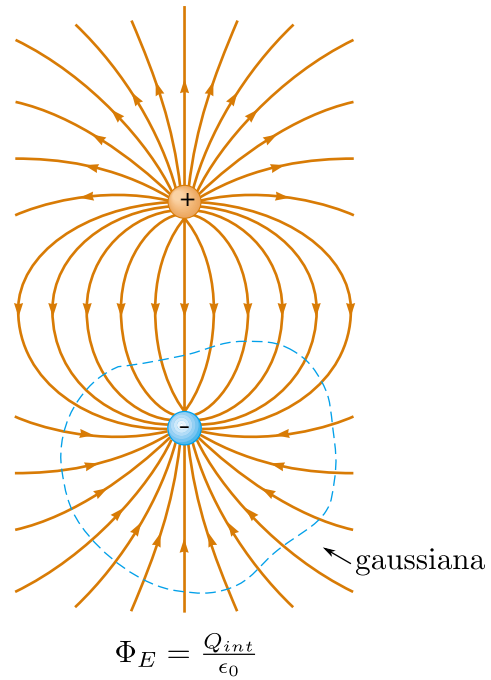
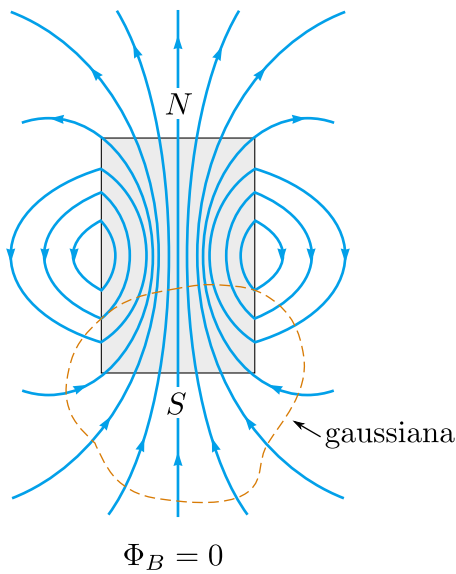
$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

A unidade de fluxo magnético é $\text{T}\cdot\text{m}^2$, que é definido como *Weber* (Wb), de modo que $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T}\cdot\text{m}^2$.

Vimos no capítulo 2 que o fluxo elétrico através de uma superfície fechada em volta de uma carga é proporcional a essa carga (Lei de Gauss). Em outras palavras, o número de linhas de campo elétrico deixando a superfície depende somente da carga total no seu interior. Essa propriedade é baseada no fato que as linhas de campo elétrico começam e terminam em cargas elétricas.

A situação é um pouco diferente para campos magnéticos, que são contínuos e formam curvas fechadas. Em outras palavras, linhas de campo magnético não começam e terminam em qualquer ponto, conforme figura (a) a seguir.

Note que para qualquer superfície fechada, tal como a linha tracejada na figura (a) acima, o número de linhas entrando na superfície é igual ao número saindo dela, então, o



fluxo magnético total é zero. No contrário, para uma superfície fechada ao redor de uma carga de um dipolo elétrico, conforme figura (b), o fluxo elétrico total não é zero.

Assim, a **lei de Gauss no magnetismo** estabelece que o fluxo magnético total em qualquer superfície fechada é sempre zero

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (7.1)$$

o que permite afirmar que **não há cargas magnéticas, ou seja, monopólos magnéticos não existem.**

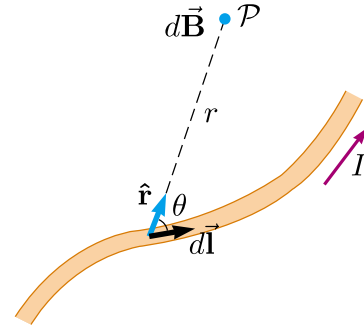
7.2 Lei de Biot-Savart

Se não existem cargas magnéticas, quais seriam as fontes do campo magnético?

Pouco depois de Oersted descobrir em 1819 que uma bússola é defletida por um condutor que carrega uma corrente elétrica, Jean-Baptiste Biot e Félix Savart realizaram experimentos quantitativos da força exercida por uma corrente elétrica num magneto próximo.

A partir dos seus resultados experimentais para o campo magnético $d\vec{B}$ num ponto \mathcal{P} associado com um elemento de linha $d\vec{l}$ de um condutor carregando uma corrente estacionária I , conforme figura, Biot e Savart chegaram as seguintes propriedades experimentais para o campo magnético $d\vec{B}$:

- é perpendicular a ambos $d\vec{l}$ e ao vetor unitário \hat{r} dirigido de $d\vec{l}$ para \mathcal{P} .
- a sua intensidade é inversamente proporcional a distância até o ponto r^2 , e é proporcional a corrente I e a magnitude dl .
- a sua intensidade é proporcional a $\sin \theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores $d\vec{l}$ e \hat{r} .



Essas propriedades podem ser resumidas numa expressão matemática conhecida hoje como lei de Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.2)$$

onde μ_0 é a constante denominada **permeabilidade magnética do vácuo** e tem valor igual a

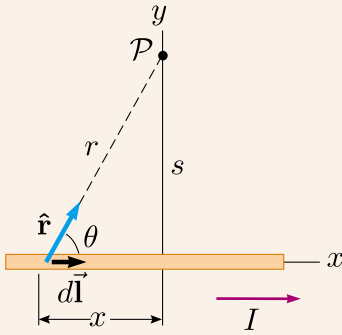
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T.m/A}$$

Note que o campo magnético dado pela Lei de Biot-Savart é o campo criado por uma corrente em somente um pequeno elemento de linha $d\vec{l}$ do condutor. Para encontrar o campo magnético *total* \vec{B} criado em algum ponto por uma corrente de tamanho finito, devemos somar as contribuições de todos elementos de corrente $I d\vec{l}$ que formam a corrente. Isso é, devemos calcular \vec{B} a partir da integral

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.3)$$

Exemplo 7.1. Campo Magnético de um Fio Retilíneo

Consideremos um fio retilíneo e fino, de comprimento L , carregando uma corrente elétrica estacionária I e localizado ao longo do eixo x , conforme figura.



Pela Lei de Biot-Savart, sabemos que o campo magnético criado pelo fio no ponto \mathcal{P} que situa-se a uma distância s do fio pode ser calculado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fio}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Primeiramente vamos identificar o elemento de corrente do fio, que pode ser facilmente descrito por $d\vec{l} = dx\hat{x}$.

Em seguida iremos efetuar o produto vetorial entre $d\vec{l}$ e \hat{r} , que nesse caso tem a direção z positivo, usando a regra da mão direita, de modo que

$$d\vec{l} \times \hat{r} = |d\vec{l} \times \hat{r}| \hat{z} = (dx \sin \theta) \hat{z}$$

A distância do ponto \mathcal{P} ao elemento de corrente é obtida geometricamente como $r^2 = x^2 + s^2$, além do fato que $\sin \theta = s/r$, e com isso temos a integral de Biot-Savart

$$\vec{B}(\mathcal{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{s \, dx}{(x^2 + s^2)^{3/2}}$$

e como $\int s \, dx / (x^2 + s^2)^{3/2} = x/s\sqrt{x^2 + s^2}$ (***Mostre!**), podemos escrever

$$\vec{B}(\mathcal{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{L/s}{\sqrt{(L/2)^2 + s^2}} \hat{z}$$

No limite que o fio é muito longo, ou seja, $L \gg s$, é fácil mostrar que

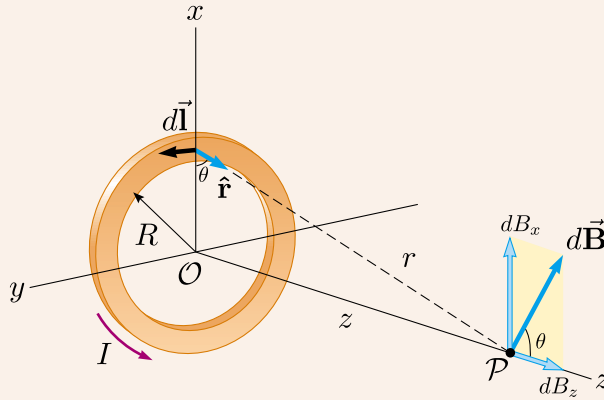
$$\lim_{L \gg s} \vec{B}(\mathcal{P}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{z}$$

É fácil notar que o campo magnético produzido por um fio muito longo só depende da distância perpendicular a ele do ponto. Isto é, a intensidade do campo \vec{B} é constante em qualquer círculo de raio s , enquanto sua direção é dado pela regra da mão-direita de tal forma que o campo circule ao redor do fio. Assim, *as linhas de campo magnético produzidas por um fio retilíneo e muito longo que carrega uma corrente estacionária são círculos concêntricos ao fio e pertencem a planos perpendiculares a ele.*

Exemplo 7.2. Campo Magnético no eixo de uma Espira

Consideremos uma espira circular de raio R localizada no plano xy e carregando uma

corrente estacionária I , conforme figura.



Pela Lei de Biot-Savart, sabemos que o campo magnético criado pela espira em qualquer ponto \mathcal{P} que situa-se a uma distância z do centro \mathcal{O} dela, pode ser calculado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{espira}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Nessa situação, todos os elementos de corrente $d\vec{l}$ da espira são perpendiculares ao vetor \hat{r} do próprio elemento, uma vez que o primeiro se encontra no plano xy e o segundo no plano xz , como na situação apresentada ao lado. Então, para qualquer elemento

$$|d\vec{l} \times \hat{r}| = (dl)(1) \sin 90^\circ = dl$$

e sua distância até o ponto \mathcal{P} é a mesma $r^2 = z^2 + R^2$.

A direção de $d\vec{B}$ produzido por esse elemento é perpendicular ao plano formado por $d\vec{l}$ e \hat{r} , conforme figura. Decompondo esse vetor numa componente dB_x e outra dB_z , notamos que quando as componentes dB_x forem somadas sobre todos os elementos da espira, a componente resultante B_x será nula. Mesmo argumento vale para a componente B_y , de modo que a única componente restante será a componente B_z dada por $\vec{B} = B_z \hat{z}$ onde

$$B_z = \int_{\text{espira}} dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{espira}} \frac{ds \cos \theta}{(z^2 + R^2)}$$

sendo a integral feita sobre toda a espira. Como $\cos \theta = R/(z^2 + R^2)^{1/2}$, obtemos que

$$B_z = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_{\text{espira}} ds$$

e como $\int_{\text{espira}} ds = 2\pi R$ é o comprimento da espira, chegamos ao resultado

$$\vec{B}(\mathcal{P}) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Podemos re-escrever esse resultado usando a definição de momento de dipolo magnético da espira, apresentada no capítulo anterior, que nesse caso é

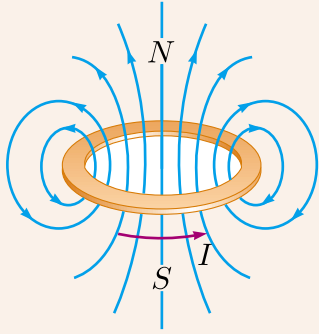
$$\vec{\mu} = i\pi R^2 \hat{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(\mathcal{P}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

ou seja, o campo magnético no eixo da espira tem a direção do momento de dipolo magnético dela própria.

Se o ponto \mathcal{P} estiver muito distante da espira, ou a espira fosse muito pequena, estaríamos no limite $z \gg R$, da tal forma que

$$\lim_{z \gg R} \vec{B}(\mathcal{P}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}$$

que é o limite conhecido como o campo magnético de um **dipolo magnético físico**.



O padrão das linhas de campo magnético para uma espira circular de corrente é apresentado na figura a seguir. Por clareza, as linhas são desenhadas somente em um plano que contém o eixo da espira.

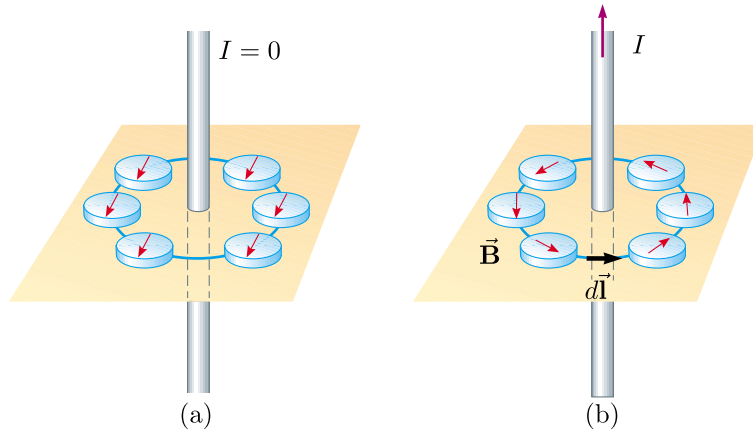
Assim, as linhas de campo magnético produzidas por uma espira circular são axialmente simétricas e parecem aquelas linhas produzidas por um ímã, de modo que podemos associar a espira um pólo norte e um pólo sul, essencialmente caracterizado pelo seu momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$.

7.3 Lei de Ampère

Em 1819, a descoberta de Oersted sobre uma bússola defletida demonstra que um condutor carregando uma corrente elétrica produz campo magnético. A figura a seguir mostra como esse efeito pode ser demonstrado usando algumas bússolas colocadas num plano horizontal próximo a um fio longo vertical.

Quando nenhuma corrente passa pelo fio, todas bússolas apontam na mesma direção (aquela do campo magnético da Terra), como esperado na Fig.(a). Quando o fio carrega uma corrente estacionária forte, todas as bússolas são defletidas numa direção tangente a um círculo, como na Fig.(b).

Como as bússolas apontam na direção de \vec{B} , concluímos que as linhas de \vec{B} formam círculos ao redor do fio, como discutido na seção anterior. Por simetria, a intensidade de \vec{B} é a mesma em todo lugar no caminho circular centrado no fio e pertencente ao plano perpendicular ao fio, de modo que $\vec{B} = B(s)\hat{\phi}$, sendo ϕ a coordenada angular cilíndrica. Variando a corrente elétrica I e a distância s ao fio, encontramos que $B(s)$ é proporcional a



corrente e inversamente proporcional ao fio, de modo que $B(s) = \mu_0 I / 2\pi s$.

Vamos calcular o produto $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ para um pequeno elemento de linha $d\vec{l}$ num caminho circular definido pela bússola, e somar esse produto sobre todos elementos de linha sobre o caminho circular. Ao longo desse caminho, os vetores $d\vec{l}$ e \vec{B} são paralelos em cada ponto (vide Fig.(b)), tal que $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$. Além disso, a intensidade de \vec{B} é constante nesse círculo conforme vimos. Portanto, a soma dos produtos $B dl$ sobre o caminho fechado, que é equivalente a integral de linha $\vec{B} \cdot d\vec{l}$, é

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} (2\pi s) = \mu_0 I$$

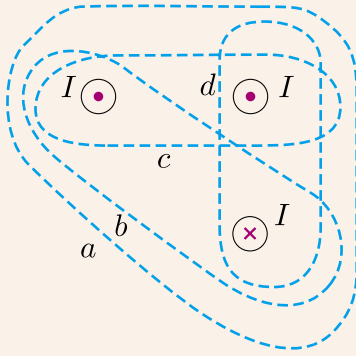
onde $\oint dl = 2\pi s$ é circunferência do caminho circular. Embora esse resultado fora calculado para o caso especial de um caminho circular ao redor do fio, isso vale para uma curva fechada de *qualquer* forma, uma **amperiana** circundante à corrente.

O caso geral, conhecido como Lei de Ampère, pode ser descrito como a integral de linha de $\vec{B} \cdot d\vec{l}$, ou seja, a circulação de \vec{B} ao redor de qualquer curva fechada é igual a $\mu_0 I$, onde I é a corrente total que passa através de qualquer superfície limitada pela curva fechada.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (7.4)$$

Exemplo 7.3. Circulação do Campo Magnético

Consideremos 4 curvas fechadas nomeadas a , b , c e d orientadas no sentido anti-horário e pertencentes a um plano perpendicular ao eixo de três fios que carregam correntes I , conforme figura.



Pela Lei de Ampère, sabemos que a circulação do campo magnético criado pelos três fios em qualquer uma das curvas pode ser calculado por

$$\mathcal{C}_i \equiv \oint_i \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

Na curva *a* vemos que as três correntes estão cercadas pela curva, de modo que

$$\mathcal{C}_a \equiv \oint_a \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I + I - I) = \mu_0 I$$

pois duas correntes estão no sentido positivo e somente uma das correntes está orientada no sentido contrário.

Na curva *b* vemos que somente duas correntes estão cercadas pela curva, de modo que

$$\mathcal{C}_b \equiv \oint_b \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I - I) = 0$$

pois uma corrente está no sentido positivo e a outra está orientada no sentido contrário.

Na curva *c* vemos que duas correntes estão cercadas pela curva e ambas no mesmo sentido, assim

$$\mathcal{C}_c \equiv \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I + I) = 2\mu_0 I$$

Na curva *d* vemos que duas correntes estão cercadas pela curva e em sentidos opostos, assim

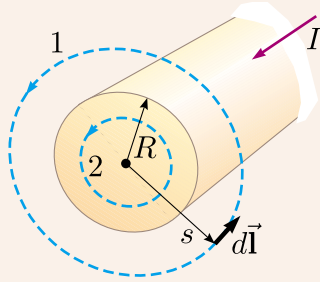
$$\mathcal{C}_d \equiv \oint_d \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I - I) = 0$$

Assim, usando a lei de Ampère fica fácil determinar a circulação do campo magnético ao longo de qualquer curva, basta saber a corrente total que atravessa a superfície delimitada pela curva dada.

A lei de Ampère descreve a criação de campos magnéticos por todas configurações contínuas de correntes, mas nesse nível matemático é somente útil para cálculo de campos magnéticos de configurações de correntes tendo alto grau de simetria. Seu uso é similar aquele da lei de Gauss no cálculo do campo elétrico para distribuições de cargas altamente simétricas.

Exemplo 7.4. Campo Magnético criado por um Cilindro muito Longo

Consideremos um fio retilíneo e muito longo de raio R que carrega uma corrente estacionária I que é uniformemente distribuída através da seção reta do fio.



Pela alta simetria do fio, podemos determinar o campo magnético pela lei de Ampère. De fato, pela simetria axial, as linhas de força de \vec{B} , dentro e fora do fio, são círculos concêntricos, orientados como na figura (curvas 1 e 2), e a intensidade de B não varia ao longo de cada um desses círculos.

Usando coordenadas cilíndricas com eixo z paralelo à corrente, temos

$$\vec{B} = B(s)\hat{\varphi}$$

e o elemento de linha de um círculo pode ser escrito como $d\vec{l} = dl\hat{\varphi}$.

Para o caso $s > R$, devemos chegar no mesmo resultado que aquele obtido pela lei de Biot-Savart. Para analisar esse caso, escolhemos como caminho de integração o círculo 1, conforme figura, e com isso temos

$$\oint_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi s B(s) = \mu_0 I$$

e como a corrente total I atravessa a área definida pela curva 1, concluímos que

$$B(s > R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

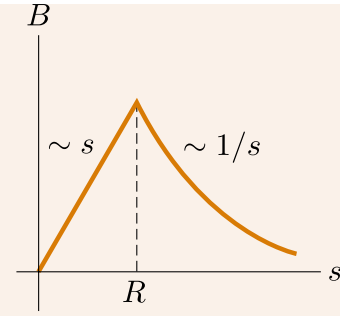
Para o caso $s < R$, escolhemos como caminho de integração o círculo 2, conforme figura, e com isso temos

$$\oint_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi s B(s) = \mu_0 I'$$

e como a corrente I' que atravessa a área definida pela curva 2 é proporcional à área da mesma, sabemos que $I' = (I/\pi R^2)\pi s^2$, e com isso

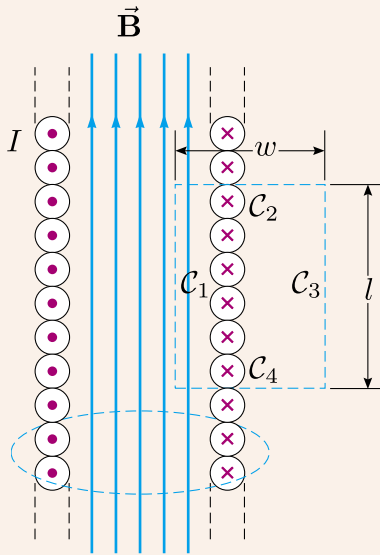
$$B(s < R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} s$$

A intensidade do campo magnético B como função da distância ao eixo do fio s é representada no gráfico ao lado. Notemos que nos dois casos, o campo magnético em $s = R$ é o mesmo, demonstrando que o campo magnético é contínuo na superfície do fio.



Exemplo 7.5. Campo Magnético criado por um Solenóide muito Longo

Consideremos um solenóide, um fio muito longo enrolado na forma de uma hélice, retilíneo e muito longo de raio R que carrega uma corrente estacionária I e tem n espiras por unidade de comprimento. De fato, consideraremos um *solenóide ideal*, onde a separação entre as espiras é desprezível e o comprimento do solenóide é muito maior que o seu raio interno.



Pela alta simetria do solenóide, podemos determinar o campo magnético pela lei de Ampère. De fato, pela simetria cilíndrica, as linhas de força de \vec{B} , dentro e fora do solenóide, são axiais, isto é, são linhas paralelas ao eixo do solenóide, orientados como na figura (corte longitudinal do solenóide), e a intensidade de B deve depender da distância ao eixo do solenóide.

Usando coordenadas cilíndricas com eixo z paralelo à corrente, temos

$$\vec{B} = B(s)\hat{z}$$

Para determinar o campo no interior do solenóide, ou seja no caso $s < R$, escolhemos como amperiana o retângulo $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$, conforme figura. Para facilitar o cálculo, a curva \mathcal{C}_3 é levada ao infinito, de tal forma que o campo magnético sobre essa curva seja nulo, de modo que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = lB(s) = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

onde a integrais sobre \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 devem ser nulas pois $\vec{B} \perp d\vec{l}$ ao longo dessas curvas, e a integral sobre \mathcal{C}_4 é nula pois $\vec{B} \rightarrow 0$ quando $w \rightarrow 0$. Além disso, a corrente total que passa pela amperiana é $I_{\text{enc}} = NI$, de modo que

$$B(s < R) = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I$$

onde N/l é exatamente n , o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide.

Para determinar o campo no exterior do solenóide, ou seja no caso $s > R$, escolhemos como amperiana o mesmo retângulo \mathcal{C} , porém, levando a curva \mathcal{C}_1 para fora do solenóide, e com isso

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = lB(s) = \mu_0 I_{\text{enc}} = 0$$

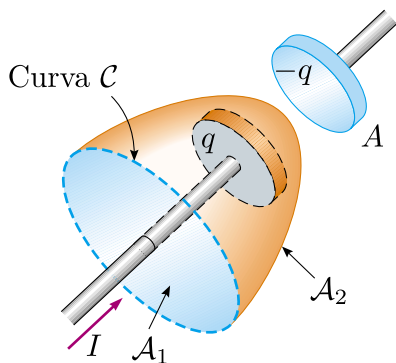
onde usamos os mesmos argumentos anteriores, e utilizamos o fato que a corrente nessa nova amperiana é zero, de modo que

$$B(s > R) = 0$$

Assim, num solenóide ideal, o campo magnético é uniforme em seu interior e nulo na região externa.

7.4 Corrente de Deslocamento e a Lei de Ampère-Maxwell

Vimos que quando um condutor carregado uma corrente elétrica e tem alta simetria, podemos usar a lei de Ampère para calcular o campo magnético criado. Na lei de Ampère, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$, a integral de linha é sobre qualquer curva fechada através da qual atravessa a corrente de condução, onde a corrente de condução é definida pela expressão $I = dq/dt$. Porém, nesta forma, a lei de Ampère é válida somente se os campos elétricos presentes são constantes no tempo, ou seja, estacionários.



Consideremos um capacitor que está carregando. Quando uma corrente de condução está presente, a carga na placa positiva muda mas *nenhuma corrente existe entre as placas*. A lei de Ampère estabelece que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ ao longo do caminho deve ser igual a $\mu_0 I$, onde I é a corrente total que atravessa qualquer superfície delimitada pela curva \mathcal{C} .

Agora, consideremos duas superfícies \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , conforme figura, delimitadas pela mesma curva \mathcal{C} .

Quando o caminho \mathcal{C} é considerada como a borda de \mathcal{A}_1 , $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ pois a corrente

de condução passa através de \mathcal{A}_1 . Quando o caminho é considerado como a borda de \mathcal{A}_2 , contudo, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ pois nenhuma corrente de condução passa através de \mathcal{A}_2 . Então, temos uma situação contraditória que aparece devido a discontinuidade da corrente!

Maxwell resolveu esse problema postulando um termo adicional do lado direito da lei de Ampère, que inclui um fator chamado **corrente de deslocamento** I_d , definida como

$$I_d \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (7.5)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ é o fluxo elétrico.

Como o capacitor está sendo carregado (ou descarregado), a variação do campo elétrico entre as placas deve ser considerada equivalente à corrente. Quando a expressão para a corrente de deslocamento é adicionada à corrente de condução no lado direito da lei de Ampère, o problema apresentado fica resolvido. Não importa que superfície delimitada por \mathcal{C} seja escolhida, ora uma corrente de condução ora uma corrente de deslocamento irá atravessá-la.

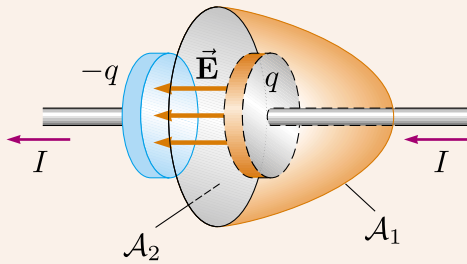
Com esse novo termo I_d , podemos expressar a forma geral da lei de Ampère, denominada **lei de Ampère-Maxwell** como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (7.6)$$

Desta forma, concluímos que campos magnéticos são produzidos ora por correntes elétricas ora por campos elétricos que variam no tempo.

Exemplo 7.6. Corrente de Deslocamento num Capacitor Carregando

Consideremos um capacitor com placas de área A carregando devido a uma corrente I , conforme figura.



O fluxo elétrico que atravessa a superfície \mathcal{A}_2 é

$$\Phi_E = \int_{\mathcal{A}_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$$

onde E é a intensidade do campo elétrico uniforme entre as placas.

Se q é carga numa das placas em qualquer instante t , então $E = q/(\epsilon_0 A)$, e o fluxo elétrico através \mathcal{A}_2 é simplesmente

$$\Phi_E = EA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Então, a corrente de deslocamento através de \mathcal{A}_2 é

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

Isto é, a corrente de deslocamento I_d através de \mathcal{A}_2 é precisamente igual a corrente de condução I através de \mathcal{A}_1 !

