# Capítulo 3

# Potencial Eletrostático

Nesse capítulo, estudaremos o potencial eletrostático criado por cargas puntiformes e distribuições de cargas, bem como diferenças de potenciais entre pontos.

## 3.1 Força Elétrica como Força Conservativa

Uma das propriedades mais interessantes da Lei de Coulomb é o fato da força eletrostática entre cargas elétricas ser uma *força conservativa*, que obedece a condição

$$\oint \vec{\boldsymbol{F}}_{\text{el}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = 0,$$

sendo $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ um elemento diferencial de deslocamento, denotado por $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = dx\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$ no sistema de coordenadas cartesiano. Lembremos que essa integral representa o trabalho feito pela força elétrica sobre uma carga ao longo de qualquer caminho fechado, de modo que

$$W^{(\text{el})}_{A\to B} = \int_A^B \vec{\boldsymbol{F}}_{\text{el}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \tag{3.1}$$

é o trabalho da força elétrica entre quaisquer dois pontos $A$ e $B$ deve ser o mesmo para qualquer caminho que escolhamos entre esses dois pontos.

Assim como no caso das forças gravitacional e elétrica, que são forças conservativas, podemos associar à força elétrica uma diferença de energia potencial eletrostática, $W^{(\text{el})}_{A\to B} = -(U^{(\text{el})}_B - U^{(\text{el})}_A)$, sendo escrita na forma integral

$$U^{(\text{el})}_B - U^{(\text{el})}_A = -\int_A^B \vec{\boldsymbol{F}}_{\text{el}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}. \tag{3.2}$$

## 3.2 Diferença de Potencial e Potencial Eletrostático

Para um deslocamento infinitesimal $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ de uma carga, o trabalho realizado pela força elétrica numa carga é $\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{el}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = q_0\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$, sendo $q_0$ a carga teste que experimenta o campo elétrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ criado por alguma distribuição fonte de carga. Como essa quantidade de trabalho é feita pelo campo, a energia potencial do sistema carga-campo é mudada por uma quantidade $dU = -q_0 \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$. E para um deslocamento finito entre os pontos $A$ e $B$, a mudança na energia potencial $\Delta U = U_B - U_A$ do sistema é

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \tag{3.3}$$

e a integração é feita ao longo do caminho que a carga $q_0$ segue de $A$ para $B$. Como a força $q_0\vec{\boldsymbol{E}}$ é conservativa, essa integral de linha não depende do caminho que ligue $A$ a $B$.

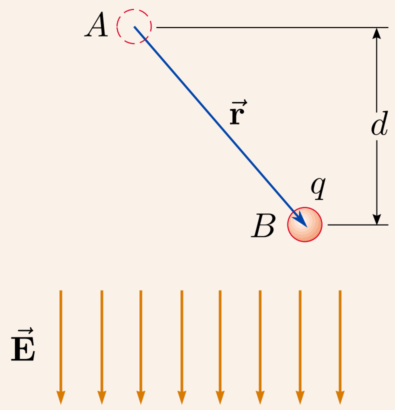
Dividindo a energia potencial pela carga teste obtemos uma quantidade física que depende somente da distribuição fonte de cargas, essa quantidade é denominada potencial eletrostático $V$. Assim, a diferença de potencial $\Delta V = V_B - V_A$ entre dois pontos $A$ e $B$ num campo elétrico é definida como a mudança de energia potencial do sistema quando uma carga teste é deslocada entre os pontos dividida pela carga teste $q_0$

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \tag{3.4}$$

A unidade de potencial eletrostático no S.I é o *Volt*, $V \equiv C/m$. Como o campo elétrico se relaciona com o potencial, é comum utilizarmos como unidade de campo $V/m$, além de $N/C$.

**Exemplo 3.1.** Diferença de Potencial num Campo Elétrico Uniforme

Vamos determinar a diferença de potencial (d.d.p.) entre os pontos $A$ e $B$ sujeitos a um campo elétrico uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$ e a variação da energia potencial necessária para levar uma carga $q$ de um ponto a outro, conforme figura.




O campo elétrico nessa região é $\vec{\boldsymbol{E}} = -E\hat{\boldsymbol{y}}$, de modo que o produto escalar $\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = E\,\mathrm{d}y$, e nesse caso temos

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\int_A^B E\,\mathrm{d}y = -Ed.$$

Assim, o potencial em $B$ deve ser menor do que o potencial em $A$ pois a diferença de potencial é negativa entre os pontos. Isso significa que o campo elétrico aponta no sentido em que há decréscimo do potencial.

$$\Delta V = -Ed$$

A variação da energia potencial eletrostática é dada por $\Delta U = q\Delta V$, então

$$\Delta U = -qEd.$$

O que nos informa que a energia potencial do sistema diminui fazendo com que a energia cinética da partícula aumentasse $\Delta K = -\Delta U$, uma vez que não há forças dissipativas durante a trajetória.

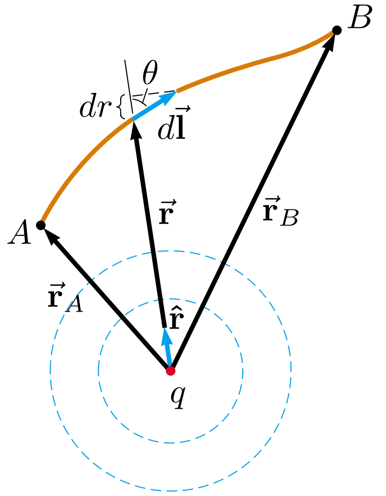
## 3.3 Potencial de Cargas Puntiformes

Agora que sabemos determinar a diferença de potencial entre dois pontos do espaço, podemos o potencial eletrostático num ponto específico do espaço localizado a uma distância $r$ de uma carga puntiforme. Para isso, começaremos com a expressão geral

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

onde $A$ e $B$ são os dois pontos arbitrários conforme a figura. Em qualquer ponto do espaço, o campo elétrico de uma carga puntiforme é $\vec{\boldsymbol{E}} = kq\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$, onde $\hat{\boldsymbol{r}}$ é um vetor unitário dirigido da carga para o ponto. A quantidade $\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ pode ser expressa como

$$\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = k\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$




O produto escalar $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mathrm{d}l \cos\theta$, onde $\theta$ é o ângulo entre $\hat{\boldsymbol{r}}$ e $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$. Além disso, $\mathrm{d}l \cos\theta$ é a projeção de $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ em $\hat{\boldsymbol{r}}$, então, $\mathrm{d}l\cos\theta = \mathrm{d}r$. Isto é, qualquer deslocamento $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ ao longo do caminho de $A$ para $B$ produz uma mudança $\mathrm{d}r$ na magnitude de $\hat{\boldsymbol{r}}$, o vetor posição do ponto com relação a carga fonte do campo. Fazendo essa substituição, encontramos que $\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = (kq/r^2)\,\mathrm{d}r$, e assim, a expressão para a diferença de potencial se torna

$$V_B - V_A = -kq \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = kq \left[\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = k\frac{q}{r_B} - k\frac{q}{r_A}$$

Essa equação nos mostra que a diferença de potencial entre quaisquer dois pontos $A$ e $B$ num campo criado por uma carga puntiforme depende somente das coordenadas radiais $r_A$ e $r_B$, ou seja, independente do caminho escolhido de $A$ para $B$, como discutido anteriormente.

Uma vez estabelecido uma referência para o potencial no ponto $A$, qualquer ponto $B$ terá seu potencial definido univocamente, isto é, o valor de $V_B$ depende do valor de $V_A$. É comum escolhermos a referência do potencial elétrico, no caso de uma carga puntiforme, sendo $V = 0$ em $r_A = \infty$. Com essa escolha de referência, o potencial elétrico criado por uma carga puntiforme em qualquer ponto a uma distância $r$ da carga é

$$V(r) = k\frac{q}{r}, \tag{3.5}$$

de modo que, o potencial eletrostático depende apenas da posição $V = V(x, y, z)$, ou seja, o potencial é um campo escalar.

Para um conjunto de duas ou mais cargas puntiformes, o potencial eletrostático total pode ser obtido pelo princípio da superposição, isto é, o potencial total num determinado ponto do espaço devido ao conjunto de cargas é a soma dos potenciais devido a cada carga independentemente naquele ponto. Assim, para um conjunto de cargas, o potencial eletrostático total é

$$V(r) = \sum_i V_i = \sum_i k\frac{q_i}{r_i}. \tag{3.6}$$

## 3.4 Gradiente do Potencial e Equipotenciais

Uma vez que conhecemos o potencial de uma dada configuração de cargas, será que conseguiremos inferir algo sobre o campo elétrico? De fato, sabemos que a diferença de potencial entre dois pontos infinitesimalmente próximos é dada pela própria definição do potencial

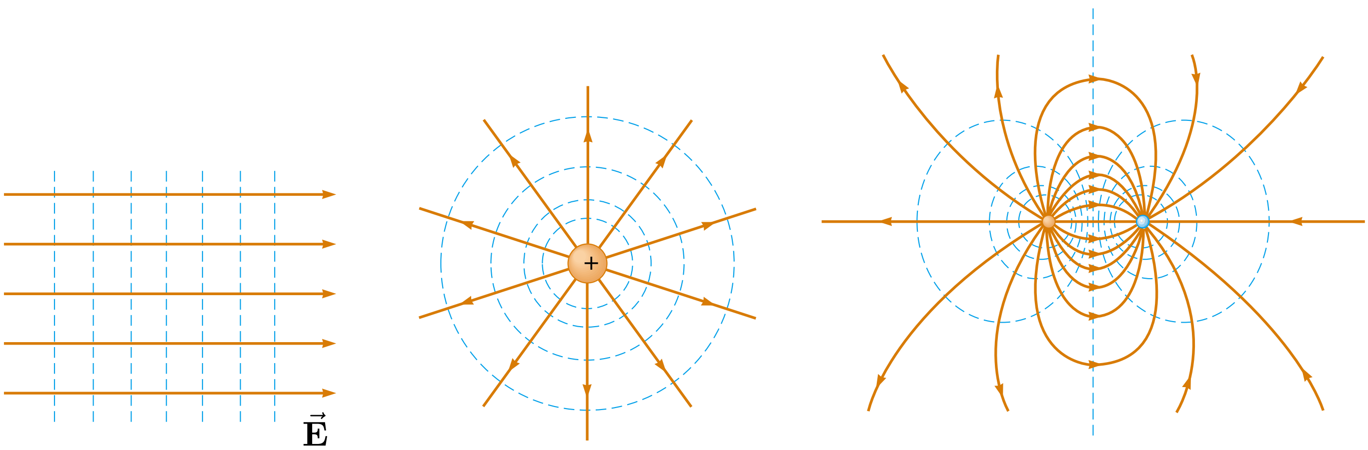
$$dV = -\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}},$$

sendo assim, o campo elétrico é proporcional ao gradiente do potencial $\vec{\boldsymbol{\nabla}}V$ e de fato

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3.7}$$

Isto é, a componente $x$ do campo elétrico é igual ao negativo da derivada do potencial com respeito a $x$. Processo similar pode ser feito para as componentes $y$ e $z$. Esse fato é a afirmação matemática que o campo elétrico é uma medida da taxa de variação do potencial com a posição.

Vamos agora imaginar um caminho $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ que seja perpendicular ao campo elétrico $\vec{\boldsymbol{E}}$. A diferença de potencial nesse caminho é $dV = -\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = 0$, ou seja, a diferença de potencial é nula quando caminhamos sobre uma superfície que é perpendicular ao campo elétrico. Essas superfícies recebem o nome de *equipotenciais*, pelo fato de terem o mesmo potencial em todos seus pontos.

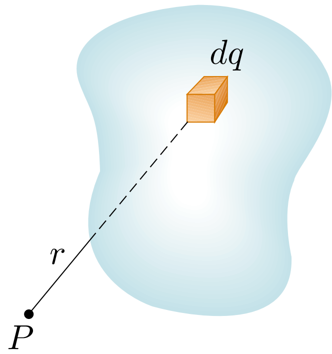



(a) (b) (c)

Na figura acima vemos equipotenciais (linhas tracejadas) e linhas de campo (linhas cheias) para (a) um campo elétrico uniforme produzido por um plano infinito de carga, (b) uma carga puntiforme, e (c) um dipolo elétrico. E em todos os casos, *o campo elétrico é sempre perpendicular às superfícies equipotenciais e tem sentido que aponta na direção do potencial decrescente.*

## 3.5 Potencial Devido a Distribuições Contínuas de Carga

Para distribuições contínuas de carga, podemos calcular o potencial eletrostático de duas maneiras apresentadas a seguir.




Se a distribuição de carga é conhecida, podemos considerar o potencial devido a um pequeno elemento de carga d$q$, tratando esse elemento como uma carga puntiforme. O potencial eletrostático $dV$ em algum ponto $P$ devido ao elemento de carga d$q$ é

$$dV = k\frac{\mathrm{d}q}{r}$$

onde $r$ é a distância do elemento de carga ao ponto $P$.

Para obter o potencial total no ponto $P$, integramos a equação acima para incluir contribuições de todos elementos de carga da distribuição. Como cada elemento está, em geral, a distâncias diferente do ponto $P$, podemos expressar

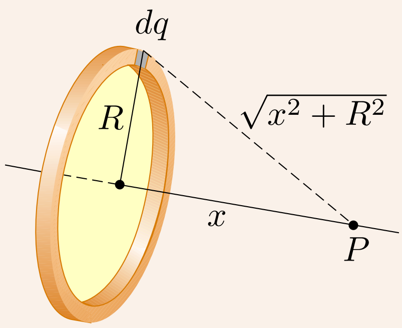
$$V = k\int\frac{\mathrm{d}q}{r} \tag{3.8}$$

onde $r$ depende do elemento de carga d$q$, e assumimos que o potencial é zero quando o ponto $P$ é infinitamente distante da distribuição de carga.

Se o campo elétrico já é conhecido por outras considerações, tais como Lei de Gauss, podemos calcular o potencial elétrico devido à distribuição contínua de carga usando a definição do potencial. Se a distribuição de carga tem simetria suficiente, primeiro calculamos $\vec{E}$ em qualquer ponto usando a Lei de Gauss e então substituímos em $\Delta V = -\int\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ para determinar a diferença de potencial entre quaisquer dois pontos. E por fim, escolhemos o potencial $V$ sendo zero em algum ponto conveniente do espaço.

**Exemplo 3.2.** Potencial devido a um Aro Uniformemente Carregado

Vamos determinar o potencial eletrostático em qualquer localizado num eixo central perpendicular a um aro uniformemente carregado de raio $R$ e carga total $Q$.




Consideremos, como na figura, que o aro está orientado tal que seu plano é perpendicular ao eixo $x$ e seu centro está na origem. Para analisar o problema, consideraremos o ponto $P$ estando a uma distância $x$ do centro do aro, conforme figura. O elemento de carga d$q$ está a uma distância $\sqrt{x^2 + R^2}$ do ponto $P$. Assim, podemos expressar $V$ como

$$V = k\int_{\text{aro}} \frac{\mathrm{d}q}{r} = k\int_{\text{aro}} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{x^2 + R^2}}.$$

Como cada elemento d$q$ está a mesma distância do ponto $P$, podemos tirar $\sqrt{x^2 + R^2}$ da integral, e $V$ se reduz a

$$V = k\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}\int_{\text{aro}} \mathrm{d}q,$$

e usando o fato que $\int_{\text{aro}} \mathrm{d}q$ é a carga total do aro $Q$, temos

$$V(P) = k\frac{Q}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

A única variável nessa expressão para $V$ é $x$, uma vez que nosso cálculo é válido somente para pontos ao longo do eixo $x$. A partir desse resultado, o campo elétrico pode ser determinado a partir do gradiente do potencial como

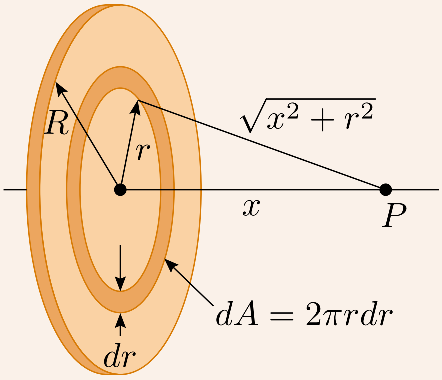
$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}} &= -\nabla V = -\frac{dV}{dx}\hat{\boldsymbol{x}} = -kQ\frac{d}{dx}(x^2 + R^2)^{-1/2} \\ &= -kQ(-\frac{1}{2})(x^2 + R^2)^{-3/2}(2x)\end{aligned}$$

então

$$\vec{\boldsymbol{E}}(P) = k\frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{x}}$$

**Exemplo 3.3.** Potencial devido a um Disco Uniformemente Carregado

Vamos determinar o potencial eletrostático em qualquer ponto localizado no eixo central perpendicular a um disco uniformemente carregado de raio $R$ e densidade superficial de carga $\sigma$.




Novamente, escolhemos o ponto $P$ no eixo $x$ a uma distância $x$ do centro do disco. Simplificamos o problema dividindo o disco num conjunto de aros carregados de espessura infinitesimal d$r$. O potencial devido a cada aro é dado pelo exemplo anterior. Consideremos um desses aros de raio $r$ e espessura d$r$, conforme figura. O elemento de área dado pelo aro é $dA = 2\pi r\,\mathrm{d}r$, de modo que o elemento de carga será $\mathrm{d}q = \sigma dA = \sigma 2\pi r\,\mathrm{d}r$. Assim, o potencial no ponto $P$ devido a esse aro é

$$dV = k\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{x^2+r^2}} = k\frac{\sigma 2\pi r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

onde $x$ é uma constante e $r$ uma variável. Para encontrar o potencial total em $P$, somamos sobre todos os aros formando o disco. Isto é, integramos $dV$ de $r=0$ a $r=R$

$$V = \pi k\sigma \int_0^R \frac{2r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}} = \pi k\sigma \int_0^R (x^2+r^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}(r^2)$$

e assim

$$V(P) = 2\pi k\sigma\left[(x^2+R^2)^{1/2} - x\right]$$

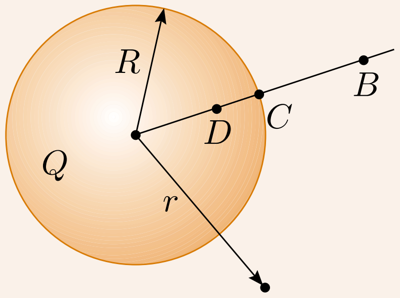
Para um ponto qualquer fora do eixo do disco, o cálculo de $V$ é muito difícil de realizar, e não trataremos esses exemplos nesse curso.

**Exercício 3.1.** Mostre a partir do potencial calculado que o campo elétrico em qualquer ponto $P$ ao longo do eixo do disco será

$$\vec{\boldsymbol{E}}(P) = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$$

**Exemplo 3.4.** Potencial devido a uma Esfera Uniformemente Carregado

Vamos determinar o potencial eletrostático em qualquer região do espaço criado por uma esfera uniformemente carregada de raio $R$ e carga total $Q$.




Comecemos pelos pontos no exterior da esfera, isto é, $r > R$, tomando o potencial como zero em $r = \infty$. Nos capítulos anteriores, encontramos que a intensidade do campo elétrico no exterior de uma esfera uniformemente carregada de raio $R$ é

$$E(r > R) = k\frac{Q}{r^2}$$

onde o campo é radial para fora quando $Q$ é positivo. Nesse caso, para obter o potencial num ponto exterior, tal como $B$ na figura, usamos $\Delta V = -\int_A^B \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$, escolhendo o ponto $A$ como $r = \infty$

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= -\int_{r_A}^{r_B} E(r)\,\mathrm{d}r = -kQ\int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = kQ\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \\ V_B - 0 &= kQ\left[\frac{1}{r_B} - 0\right] \end{aligned}$$

e assim sabemos que o potencial na região *exterior* à esfera é dado por

$$V(r > R) = k\frac{Q}{r}$$

Por continuidade em $r = R$, o potencial num ponto $C$ na superfície da esfera deve ser $V_C = kQ/R$. Para um ponto no interior da esfera, vamos lembrar que o campo elétrico no interior de uma esfera isolante uniformemente carregada é

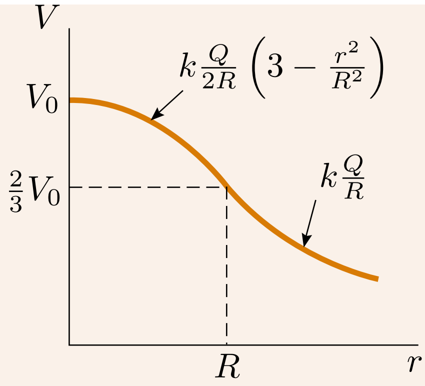
$$E(r < R) = k\frac{Q}{R^3}r$$

Podemos usar esse resultado para calcular a diferença de potencial $V_D - V_C$ em algum ponto interior $D$

$$\begin{aligned} V_D - V_C &= -\int_{r_C}^{r_D} E(r)\,\mathrm{d}r = -k\frac{Q}{R^3}\int_R^r r\,\mathrm{d}r \\ V_D - k\frac{Q}{R} &= k\frac{Q}{2R^3}(R^2 - r^2) \end{aligned}$$

de modo que o potencial na região *interior* à esfera é dado por

$$V(r < R) = k\frac{Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



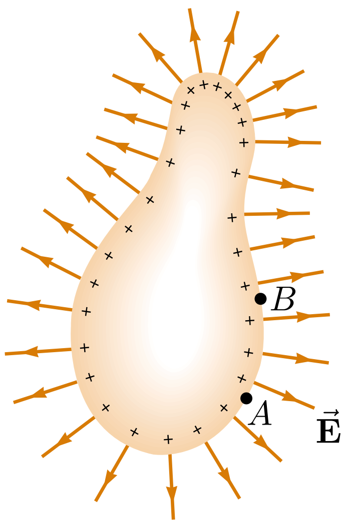

$$V(r) = \begin{cases} k\frac{Q}{2R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right) & \text{se } r < R \\ k\frac{Q}{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

Podemos esboçar um gráfico do potencial $V(r)$ como função da distância $r$ ao centro da esfera, definindo $V_0 = 3kQ/(2R)$.

## 3.6 Potencial Devido a um Condutor Carregado

Vimos no capítulo anterior que quando um condutor sólido em equilíbrio está carregado, sua carga reside na sua superfície, fato que os difere dos isolantes. Assim, o campo elétrico próximo a superfície externa é perpendicular a mesma e dentro do condutor o campo é nulo.

Consideremos dois pontos $A$ e $B$ na superfície de um condutor carregado, conforme figura.




Usando um caminho ao longo da superfície que ligue os dois pontos, vemos que o campo $\vec{E}$ é sempre perpendicular ao deslocamento $\mathrm{d}\vec{l}$, de modo que $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$. Usando esse resultado, vemos que

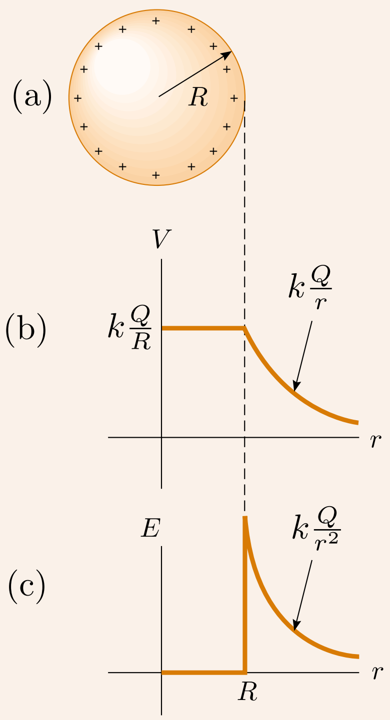
$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$$

que vale para quaisquer dois pontos na superfície, portanto $V$ é constante na superfície.

Assim, *a superfície de um condutor carregado em equilíbrio eletrostático é uma superfície equipotencial.*

**Exemplo 3.5.** Potencial de uma Esfera Condutora

Consideremos uma esfera condutora de carga $Q$ e de raio $R$, como mostra a figura (a).




O campo elétrico obtido via Lei de Gauss é

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ k\frac{Q}{r^2} & \text{se } r > R \end{cases}$$

O potencial pode então ser obtido via campo elétrico por integração, como no exemplo anterior, de modo que

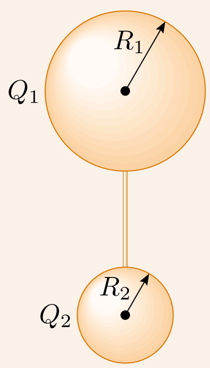
$$V(r) = \begin{cases} k\frac{Q}{R} & \text{se } r < R \\ k\frac{Q}{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

Portanto, o potencial elétrico no interior da esfera condutora é uniforme e de mesmo valor que o potencial na superfície (figura (b)), uma vez que a diferença de potencial entre a superfície e qualquer ponto no interior da esfera deve ser nula, pois o campo no interior do condutor é também nulo (figura (c)).

Concluímos então que *o potencial eletrostático de um condutor carregado é constante em qualquer ponto no interior do condutor e de mesmo valor que na superfície.*

**Exemplo 3.6.** Poder das Pontas

Consideremos um condutor representado por duas esferas condutoras de raios $R_1$ e $R_2$ conectadas por um fio condutor, como mostra a figura.




Como as esferas estão conectadas por fio condutor, elas devem ambas terem o mesmo potencial

$$V = k\frac{Q_1}{R_1} = k\frac{Q_2}{R_2}$$

Assim, a razão entre suas cargas é

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Porém, a razão entre suas densidades superficiais de cargas deve então ser

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$